BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lehrbuch

der

höhern Analysis,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Dritter Theil,

Fortsetzung der Differenzial- und Integral-Rechnung.

Mit vielen erläuternden und Uebungs-Beispielen.

Berlin, 1831.

Bei Carl Herrmann Jonas,

Schloßfreiheit Nr. 9.

Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Fünfter Theil,

Fortsetzung der Differenzial- und Integral-Rechnung.

Mit vielen erläuternden und Uebungs-Beispielen.

Berlin, 1831.

Bei Carl Herrmann Jonas,

Schloßfreiheit Nr. 9.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Der Verfasser übergiebt hiermit dem mathematischen Publiko abermals 2 Theile seines „Systems der Mathematik," nämlich den 5ten und 6ten. Auch in diesen beiden Theilen hat der Verfasser mit aller Sorgfalt gestrebt, seiner Idee eines Lehrbuches, welches nun allmählig auch anfangen muß, ein Handbuch zum Nachschlagen zu werden, möglichst getreu zu bleiben. In der höhern Analysis kann man sich aber nicht genugsam in Acht nehmen, nicht zuviel Einzelnes und Vereinzeltes zu geben. Der Verfasser hat daher von den sich herandrängenden Massen von Einzelnheiten, einige als unbrauchbar ganz unberücksichtigt lassen, andere unter einen allgemeinern Gesichtspunkt vereinigen, von Monographien sich entfernt halten, dagegen alle Kräfte zur Aufstellung von allgemeinern und fruchtbaren Methoden vereinigen müssen, damit der angehende

Mathematiker sich nicht von den ungeregelten Massen beängstigt fühle, oder wohl gar erdrückt werde; sondern in ihrer regelmäßigen Verbindung zu einem mit Nothwendigkeit hervorgehenden naturgemäßen Ganzen nicht bloß Harmonie und Einheit, sondern auch Ruhepunkte und Erholung finde, um nachgehends das Einzelne theilweise und mit Bequemlichkeit näher und nahe genug kennen lernen zu können. Um einen Band zu schreiben, hat daher der Verfasser das Doppelte und das Vierfache des Volumens mit Gewalt zurückdrängen müssen, und er glaubt dieser, nicht jedem Leser sogleich in die Augen fallenden, größesten Mühe hier besonders erwähnen zu dürfen.

Während aber der Verfasser zugleich sich fortwährend bemüht, die von seinen Vorgängern gegebenen und brauchbaren Methoden und Materialien in den Bau des Ganzen einzufügen und zu benutzen, findet er, je weiter er in das Gebiet der höhern Mathematik hineinschreitet, desto mehr Lücken auszufüllen, wenn nicht der Zweck des Lehrbuches verloren gehen, und diese Schrift selbst wieder nur ein Aggregat von einzelnen, unzusammenhängenden, oft sogar noch problematischen Sätzen werden soll. In diesem Streben nach Ausfüllung der fraglichen Lücken hat aber der Verfasser hie und da einen glücklichen Erfolg gehabt, und so dürften dieser 5te und noch einige der folgenden Theile dieses Systems auch neben berühmteren Memoiren eine

nicht ganz unwürdige Stelle einnehmen; eine Hoffnung, welche der Verfasser deshalb hier besonders ausspricht, weil die Oberflächlichkeit unserer Tage sich zu sehr daran gewöhnt hat, das Gelehrte nur außerhalb des Lehrbuches zu suchen. Und obgleich der mit der Geschichte der höhern Mathematik vertraute Leser bald herausfinden wird, was dem Verfasser eigenthümlich, und fruchtbar und wichtig zugleich ist; so glaubt er doch, außer dem, was in allen Kapiteln zerstreut sich finden dürfte, besonders hervorheben zu müssen:

1) die Allgemeinheit und Einfachheit in der Darstellung der Entwicklungsmethode des 11ten Kapitels;
2) einige Stellen im 12ten Kapitel, welche die Eigenschaften der Integrale, besonders aber der singulären Werthe betreffen, wo hie und da neue Ansichten gegeben, und die bisherigen näher erörtert und wohl auch berichtigt werden mußten; endlich
3) die in dem 13ten und 14ten Kapitel gegebene Integration der Parzialgleichungen.

Ueber diese letztere Rubrik muß sich der Verfasser noch näher auslassen. Indem er nämlich die so wichtige Erscheinung der Parzialgleichungen im Gebiete der höhern Physik in's Auge faßte, entging es ihm nicht, daß man in allen diesen Anwendungen (z. B. auf die Bewegung und das Gleichgewicht tropfbar flüssiger Massen, auf die Wellen-

bewegung in denselben oder in schwingenden Saiten, Platten, Luftsäulen ꝛc., ferner auf die Verbreitung und Vertheilung der Wärme, des Galvanismus, der Elektrizität überhaupt, ꝛc.) vermöge der Natur der Aufgabe selbst allemal sogleich besondere Integrale derjenigen Parzialgleichungen habe, zu welchen die analytisch-dynamische Behandlung dieser Aufgaben führt. Der Verfasser richtete daher sein Hauptaugenmerk auf das Problem: „aus einem besonderen Integral das allgemeine zu finden." — Die Verfolgung dieses Problems führte nun zu neuen Ansichten und zu Methoden, die sehr einfach, bequem und anwendbar sind, und welche sich auch nöthigenfalls auf Parzialgleichungen der 2ten und höhern Ordnung ausdehnen lassen, wenn auch dort die weitläufigern Rechnungen noch bedeutende, ja oft unübersteigliche Schwierigkeiten in den Weg legen können. Die neue Bahn ist jedoch gebrochen, und sie wird vielleicht, wenn sie tüchtige Männer weiter verfolgen, zu noch mehreren einfachen und wichtigen Resultaten führen.

Durch diese glücklichen Erfolge ermuthigt ging der Verfasser weiter, und sah sich zuletzt auch noch zu der Art und Weise geführt, wie in ein allgemeines Integral einer Parzialgleichung der nten Ordnung, mit beliebig vielen Veränderlichen, die willkührlichen Funktionen eingehen müssen, wenn solches in endlicher und algebraischer

Form gedacht wird. Durch die Lösung dieses Problems, welches die ausgezeichnetsten Analysten der neuesten Zeit bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis für unmöglich gehalten haben, in Verbindung mit dem vorher Besprochenen und mit den Arbeiten des Lagrange und einiger Anderer, hat aber die Theorie der Parzialgleichungen eine bisher nur gewünschte Abgeschlossenheit erreicht.

Für die wirkliche Anwendung bleiben jedoch die endlichen (rein algebraischen oder mit angezeigten Differenziationen oder Integrationen gemischten) Formen, sie mögen in der Analysis des Endlichen oder hier erscheinen, immer nur von einem sehr untergeordneten Werthe, schon deshalb, weil genau genommen nur ausnahmsweise deren wirklich existiren; und es scheint daher der Analyst, welcher die Anwendungen im Auge hat, sein Hauptaugenmerk auf die unendlichen Reihen richten zu müssen. Es werden deshalb die nun folgenden Theile dieses Systems der Mathematik, (d. h. der 7te und 8te) außer dem, was über die unendlichen Reihen bereits im 2ten Theile desselben (2te Auflage) niedergelegt sich findet, eine zusammenhängendere und vollständigere Theorie dieser Reihen zu liefern haben. Der Verfasser wird streben, so weit seine vereinzelten, ja oft bis zur Zersplitterung gezwungenen Kräfte reichen, etwas zu liefern, welches den an ihn zu machenden Forderungen möglichst genügen könne, und er wird in dieser Hoffnung

vorzüglich durch den Gedanken unterstützt, daß gerade die Reihen, sein ganzes Leben hindurch einen Lieblingsgegenstand seiner Arbeiten bildeten.

Der Druck des 6ten Theils wird spätestens gegen Ende des Juny 1832 beendigt seyn.

Berlin, im Oktober 1831.

Dr. M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß des fünften Theils.

Neuntes Kapitel.

Betrachtung der Ableitungen und Zurück-leitungen an den Grenzen. Mehrere der vorhergehenden Lehren theils verallgemeinert, theils in eine, folgenden Zwecken gemäße Form gebracht. (§§. 204.—228.) . . Pag. 3.

Erste Abtheilung. Summation mehrerer Glieder mit Ableitungen (oder Differenzialien) von einerlei oder von verschiedenen Ordnungen. Summation mehrerer Glieder mit Integralien. Beliebige Veränderung der Grenzen gegebener bestimmten Integralien. (§§. 204.—213.) . . . . . Pag. 4.—16.

§. 204. Erklärung der Zeichen $[f_x]_y$, $[\partial^n f_x]_y$, $\int_y f_x \cdot dx$, $[f_x]_{y \div a}$, $[\partial^n f_x]_{y \div a}$, $\int_{y \div a} f_x \cdot dx$.

§. 205. Während des Integrirens und Differenziirens von f_x nach x kann man statt x jeden andern, dem f_x fremden Buchstaben setzen.

§§. 206. 207. Anwendung dieser Idee zur Summation gegebener Ableitungen, von einer und derselben Ordnung, oder gegebener Integrale.

§. 208. Wie eine Ableitung von der rten Ordnung in eine andere von der r+sten Ordnung verwandelt werden könne. Darauf gegründete Summation von Ableitungen verschiedener Ordnungen.

§. 209. Es ist $[\partial^n f_x]_{px+q} = \frac{1}{p^n} \cdot \partial^n (f_{px+q})_x$.

§§. 210.211. Auch $\int_{(pb+q)\div(pa+q)} f_x \cdot dx = p \cdot \int_{b\div a} f_{px+q} \cdot dx$.

§§. 212. 213. Wie ein Integral zwischen den Grenzen a und b, in andere zwischen den Grenzen $a \pm h$, $b \pm h$ oder ap, bp oder $\frac{a}{p}$, $\frac{b}{p}$, ꝛc. verwandelt werden könne.

Zweite Abtheilung. Begriff des nten Integrals. Integriren und Differenziiren unter dem Integral- und Differenzial-Zeichen. Allgemeinere Formeln zur Zerlegung gegebener Integrale. (§§. 214.—228.) . Pag. 17.—27.

§. 214. Begriff des nten Integrals.

§. 215. Solches hat n willkührliche Konstanten.

§. 216. Erklärung von $\int^n_{x\div a} \psi_x \cdot dx^n$.

§. 217. Die mte Ableitung des nten Integrals giebt das (n—m)te Integral.

§. 218. Es ist nicht schwer, vorher entwickelte Gesetze der nten Ableitungen auf nte Integrale auszudehnen.

§§. 219.—224. Integriren unter dem Differenzialzeichen und Differenziiren unter dem Integralzeichen.

§§. 225.—228. Verallgemeinerung der Formeln für die theilweise Integration.

Zehntes Kapitel.

Integration der Gleichungen $\partial^n y_x = \psi_x$, $\partial^{m,n} u_{x,y} = \psi_{x,y}$ ꝛc. Umformung eines solchen nten Integrals. Anwendung dieser Umformung auf die Bestimmung des Ergänzungsgliedes der Maclaurin'schen oder der Taylor'schen Reihe. (§§. 229.—241.) . Pag. 28.—50.

Erste Abtheilung. Integration der Gleichungen $\partial^n y_x = \psi_x$, $\partial^{m,n} u_{x,y} = \psi_{x,y}$ ꝛc. Umformung eines solchen nten Integrals. (§§. 229.—235.) . . . . . Pag. 28.—37.

§. 229. Integration der Gleichung $\partial^n y_x = \psi_x$.

A) in unendlicher
B) in endlicher } Form.

§. 230. Umformung des nten Integrals in eine Summe von n einfachen Integralen.

§. 231. Das allgemeine nte Integral in letzterer Form.

§. 232. Das n mal mit $x = a$ anfangende nte Integral in letzterer Form, dann aber auch in ein einziges einfaches Integral vereinigt.

§§. 233.—235. Integration der Gleichungen $\frac{d^2y}{du \cdot dv} = \psi$,

$\frac{d^{m+n}y}{du^m \cdot dv^n} = \psi$, $\frac{d^{l+m+n}y}{du^l \cdot dv^m \cdot dw^n} = \psi$ ꝛc.

Zweite Abtheilung. Wichtige Anwendung der eben behandelten Lehre zur Bestimmung des Ergänzungsgliedes der Taylor'schen oder der Maclaurin'schen Reihe, wenn man solche bei irgend einem nten Gliede abbrechen läßt. Bestimmung der Grenzen zwischen denen dieses Ergänzungsglied in gegebenen Fällen liegen muß. (§§. 236.—241.) . . Pag. 38.—50.

§§. 236. 237. Das Ergänzungsglied der Taylor'schen Reihe in Form eines einfachen bestimmten Integrals.

§. 238. Das Integral $\int_{b \div a} U_z \cdot V_z \cdot dz$ liegt immer zwischen den Grenzen $U_g \cdot \int_{b \div a} V_z \cdot dz$ und $U_k \cdot \int_{b \div a} V_z \cdot dz$, wenn U_g der größeste, U_k der kleinste unter allen Werthen von U_z zwischen $z = a$ und $z = b$ ist, und wenn V_z für alle diese Werthe von z (zwischen a und b) immerfort ein und dasselbe Zeichen behält.

§. 239. Grenzen, welche daraus für obiges Ergänzungsglied hervorgehen.

§. 240. Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz in Form einer endlichen Reihe mit einem Ergänzungsgliede, dessen Grenzen man kennt.

§. 241. Erweiterung dieser Theorien auf den Taylor'schen und Maclaurin'schen Lehrsatz für Funktionen zweier und mehrerer Veränderlichen.

Eilftes Kapitel.

Ganz allgemeine Methode zur Entwicklung in Reihen zugleich mit der jedesmaligen Bestimmung des Ergänzungsgliedes. Variationsrechnung (§§. 242.—264) . . . Pag. 51.—87.

Erste Abtheilung. Von der Entwicklung der Polynomial-Funktionen in Reihen. (§§. 242. —259.) . . . . . Pag. 51.—81.

§. 242. Bezeichnung. Auf ihr beruht alles in dieser Abtheilung.

§. 243. Es ist $\delta^n V = [\partial\, V_x]_0$.

§. 244. Es ist

$\delta^m(\partial^n V_x) = \partial^n(\delta^m V)_x$, $\quad \delta^m \int^n V \cdot dx = \int^n \delta^m V \cdot dx$,

u. s. w.

§. 245. Erste Haupt-Aufgabe. $[V_a]_{a_x}$ nach Potenzen von x zu entwickeln. In dieser Aufgabe stecken der Taylor'sche, der Maclaurin'sche Lehrsatz, so wie noch viele Aufgaben des II. Theils dieses Systems als besondere Fälle.

§. 246. Zweite Haupt-Aufgabe. V_{a_x, b_x} nach Potenzen von x zu entwickeln.

§. 247. Ist $V_{b_x, a_x} = 0$, so ist auch $\delta^a V = 0$.

§. 248. Die Entwicklung von V_{a_x, b_x}, wenn $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ gegeben ist.

Anmerkungen. Was in diesen Aufgaben als ein besonderer Fall steckt, namentlich der Taylor'sche Lehrsatz für 2 Veränderliche, die Umkehrung der Reihen ꝛc.

§. 249. Wenn V bloß b_x allein enthält, aber $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ gegeben ist.

Anmerkung. Hierin steckt das Lagrange'sche Problem seinem Grundwesen nach als ein besonderer Fall.

§. 250. Dritte Haupt-Aufgabe. V_{a_x, b_x, c_x} nach Potenzen von x zu entwickeln.

§. 251. Wenn $V_{a_x, b_x, c_x} = 0$ ist, ist auch $\delta^a V = 0$, u. s. f.

§. 252. Wenn a_x, b_x, c_x im (§. 250.) noch auf verschiedene Weise von einander abhängen.

§. 253. Allgemeinere Haupt-Aufgabe, in welcher die (§§. 245. 246. 250.) als besondere Fälle stecken.

§. 254. Wenn $V = 0$ oder $V = \text{Const.}$, so ist auch $\delta^a V = 0$, u. s. f.

§. 255. Wenn a_x, b_x, c_x ꝛc. im (§. 253.) auf eine beliebig gegebene Weise von einander abhängen.

§§. 256. 257. Die Aufgabe des (§. 253.) für den Fall, daß Reihen gesetzt werden für Buchstaben, welche explizit und noch implizit in anderen Reihen vorkommen.

§. 258. Diese in den (§§. 242.—257.) gelehrte allgemeine Entwicklungs-Methode ist um so wichtiger, da sie allemal Grenzen liefert, zwischen denen das Ergänzungsglied einer so entwickelten und beliebig abgebrochenen Reihe liegen muß.

§. 259. Zusammenhang zwischen diesen und kombinatorischen Entwicklungen; aus der Vergleichung beider geht das Gesetz für $d^n f_{x,y,z,\ldots}$ hervor.

Zweite Abtheilung. Variationsrechnung. (§§. 260.—264.) . . . . . Pag. 82.—87.

Sie verhält sich zu der so eben in den (§§. 242.—259.) vorgetragenen Entwicklungsmethode, wie die Leibnitz'sche Differenzialrechnung zu der hier im III. IV. und V. Theile d. Systems vorgetragenen (ihrem Wesen nach Lagrange'schen) Ableitungsrechnung.

Zwölftes Kapitel.

Von den Differenzial- oder Ableitungsgleichungen mit einem unabhängigen Veränderlichen. Integration derselben. (§§. 265.—282.) Pag. 88.—232.

Erste Abtheilung. Von den Differenzial- oder Ableitungsgleichungen mit einem unabhängigen Veränderlichen und zwischen nur zwei Veränderlichen überhaupt (zur Bestimmung einer einzigen Funktion y von x) (§§. 265.—280.) . . . . . Pag. 91.—223.

A. α) Von den Integralien einer Differenzialgleichung der 1sten Ordnung.

§. 265. Eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung durch Variationsrechnung zu integriren.

§. 266. Dasselbe durch den Maclaurin'schen Lehrsatz.

§. 267. Das Integral hat nur eine einzige willkührliche Konstante.

§§. 268. 269. Allgemeines Integral. Wie aus selbigem die Differenzialgleichung erhalten wird.
§. 270. A. β) Von den singulären Werthen einer Differenzialgleichung der 1sten Ordnung.
B. α) Von den Integralien einer Differenzialgleichung der 2ten Ordnung.
§. 271. Eine Differenzialgleichung der 2ten Ordnung durch Variationsrechnung zu integriren.
§. 272. Dasselbe durch den Maclaurin'schen Lehrsatz.
§. 273. Das Integral hat nur 2 willkührlichs Konstanten.
§. 274. Eigenschaften der allgemeinen Ur-Integrale und der allgemeinen ersten Integrale einer gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung.
§. 275. B. β) Von den singulären Werthen einer Differenzialgleichung der 2ten Ordnung.
C. α) Von den Integralien einer Differenzialgleichung der nten Ordnung.
§. 276. Eine Differenzialgleichung der nten Ordnung durch Variationsrechnung zu integriren.
§. 277. Dasselbe durch den allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatz.
§. 278. Das Integral hat nur n willkührliche Konstanten.
§. 279. Eigenschaften der allgemeinen Ur-Integrale und der allgemeinen ersten, zweiten, dritten, aten, n—1ten Integrale.
§. 280. C. β) Von den singulären Werthen einer Differenzialgleichung der nten Ordnung.

Zweite Abtheilung. Von den Differenzialgleichungen zwischen 3 und mehreren Veränderlichen, von denen jedoch nur ein einziger als unabhängig angesehen wird. Elimination eines Veränderlichen nebst seinen Ableitungen. Integration solcher Gleichungen. (§§. 281. 282.) . . . Pag. 224—232.

§. 281. Integration zweier Differenzialgleichungen zwischen 3 Veränderlichen y, z und x, in denen bloß Ableitungen nach x vorkommen.
§. 282. Integration von n Differenzialgleichungen zwischen n+1 Veränderlichen, in denen bloß Ableitungen nach einem einzigen Veränderlichen x vorkommen.

Dreizehntes Kapitel.

Von den Differenzialgleichungen mit zwei oder mehreren unabhängigen Veränderlichen, aber von der ersten Ordnung, d h. von den Parzial-Differenzialgleichungen der ersten Ordnung und ihrer Integration. (§§. 283.—301.) . . . . . Pag. 233.—320.

Erste Abtheilung. Betrachtung einer einzigen Parzial-Differenzialgleichung der ersten Ordnung. (§§. 283.—295.) . . . Pag. 233.—306.

A. α) Von den Integralien einer Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen.

§§. 283. 284. Die Gleichung der ersten Ordnung zwischen x, y, z, ∂z_x und ∂z_y nämlich $F_{x,y,z,z_1,z} = 0$ zu integriren.

§. 285. Verschiedene Formen des allgemeinen Integrals.

§. 286. I.—III. Die endliche Form des allgemeinen Integrals enthält allemal eine willkührliche Funktion von ω, während ω eine, von der Parzial-Differenzialgleichung $F = 0$ abhängige Funktion von x, y und z ist. IV. Besondere Integrale V. Das allgemeine Integral mit der willkührlichen Funktion ψ_ω ändert sich nicht, 1) wenn statt ω irgend eine bestimmte Funktion des zuerst für ω gefundenen Ausdruckes, 2) wenn statt ψ_ω irgend eine Funktion von ω und ψ_ω gesetzt wird.

§. 287. I. Wenn das allgemeine Integral $W_{x,y,z,\psi_\omega} = 0$ der Form nach bekannt ist, ω dazu zu finden.

II. Behandlung des einfacheren Falles, wenn ω bloß x und y aber kein z enthält.

III. Wie aus einem besondern Integral, mit einer einzigen willkührlichen Konstante, die (in (I.) als bekannt vorausgesetzte) Form des allgemeinen Integrals gefunden werden kann. IV. Erklärung des ausreichenden und V. des vollständigen Integrals.

§. 288. Wie I. aus zweien besondern Integralen, von denen ein einziges eine willkührliche Konstante enthält, wie daher auch II. aus einem vollständigen Integral das allgemeine Integral sogleich und ohne In-

tegration gefunden werden kann, so oft ω bloß x und y aber kein z mehr enthält.

III. Wie man das Verfahren des (§. 287. III.) modifiziren kann. IV. Wie aus dem allgemeinen Integral $W_{x,y,z,\psi_\omega} = 0$ und $\partial W_{(x)} = 0$, $\partial W_{(y)} = 0$ durch Elimination von ψ_ω und $\partial\psi_\omega$, wie aber auch aus dem vollständigen (besondern) Integral $V_{x,y,z,a,b} = 0$ und $\partial V_{(x)} = 0$ und $\partial V_{(y)} = 0$, durch Elimination von a und b, die Parzialgleichung hervorgehen muß.

V. Wie $\partial V_a = \partial W_\psi \cdot \partial\psi_a$, $\partial V_b = \partial W_\psi \cdot \partial\psi_b$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben müssen. Daraus abgeleitete Regel zur Auffindung des allgemeinen Integrals, wenn ein vollständiges besonderes Integral gegeben ist, ohne integriren zu müssen, auch wenn ω noch z in sich aufnimmt. (Vgl. II.).

§. 289. A. β) Von den singulären Werthen der Parzialgleichungen mit 3 Veränderlichen.

B. α) Von den Integralien einer Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen vier Veränderlichen, von denen drei von einander unabhängig sind.

§§. 290. 291. Die Gleichung der ersten Ordnung zwischen x, y, z, u, ∂u, ∂u_y, ∂u_z, nämlich $F_{x,y,z,u,u_{1/1}u,u'} = 0$, zu integriren.

§. 292. I. II. Die endliche Form des allgemeinen Integrals enthält $\psi_{\omega,\omega'}$, wo ω u. ω' wiederum Funktionen von x, y, z und u sind.

III. Besondere Integrale. IV. Das allgemeine Integral bleibt eben so allgemein 1) wenn Funktionen von ω und ω' statt ω oder statt ω', 2) wenn eine Funktion von ω, ω' und ψ statt ψ gesetzt wird.

§ 293. Ist für die jetzige Aufgabe, was §. 287. für die vorige Aufgabe war.

§. 294. Ist für die jetzige Aufgabe, was §. 288. für die vorige war.

§. 295. B. β) Von den singulären Werthen der Parzialgleichungen der ersten Ordnung mit 4 Veränderlichen, worunter 3 unabhängig sind.

Zweite Abtheilung. Integration zweier oder mehrerer Parzialgleichungen der ersten Ordnung. (§§. 296.—301.) . . . Pag. 307.—320.

A. Wenn in den gegebenen Gleichungen nur die Ableitungen eines einzigen Veränderlichen (nach zwei oder mehrern unabhängigen Veränderlichen) vorkommen.

§§. 296. 297. Zwei Gleichungen zwischen x, y, z, ∂z_x, ∂z_y zu integriren.

§. 298. Zwei Gleichungen zwischen x, y, z, u, ∂u_x, ∂u_y, ∂u_z zu integriren.

§§. 299. 300. Drei Gleichungen zwischen x, y, z, u, ∂u_x, ∂u_y, ∂u_z zu integriren.

B. Wenn in den Gleichungen die Ableitungen zweier oder mehrerer Veränderlichen (nach zwei oder mehreren unabhängigen Veränderlichen) vorkommen.

§. 301. Eine einzige Aufgabe zur Andeutung der übrigen und ihrer Behandlung.

Vierzehntes Kapitel.

Von den Parzialgleichungen der zweiten und höhern Ordnung. (§§. 302.—327.) . . Pag. 321.—376.

A. Von einer einzigen Parzialgleichung der zweiten und höhern Ordnung.

§§. 302. 303. Eine solche Gleichung der zweiten Ordnung allgemein zu integriren.

§§. 304. 305. Die endliche Form des allgemeinen Integrals ist $W_{x,y,z,\nu} = 0$, wo $\nu = \psi_\omega + \varphi_\omega$, oder (wenn $\omega' = \omega$ wird) wo $\nu = \omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega$ ist, während ω und ω' bestimmte Funktionen von x, y und z sind, ψ und φ aber ganz willkührliche Funktionen von ω und ω'.

§. 306. I. Besondere Integrale. II. Wie in dem allgemeinen Integral die willkührlichen Funktionen verändert werden können.

§. 307. Wenn die Form des allgemeinen Integrals $W_{x,y,z,\nu} = 0$ gegeben ist, wie ω und ω' dazu gefunden werden kann.

§. 308. Wie, im Falle $\omega = \omega'$, also $\nu = \omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega$ ist, ω' gefunden werden kann.

§§. 309. 310. Aus einem besondern Integral mit einer willkührlichen Konstante a die Form des allgemeinen Integrals zu finden.

§. 311. Wie aus einem besondern Integral mit 5 willkührlichen Konstanten und ihren 5 Ableitungsgleichungen, durch Elimination dieser 5 Konstanten, die Parzialgleichung der 2ten Ordnung hervorgeht.
§. 312. Singuläre Werthe.
§. 313. Eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung mit 3 unabhängigen Veränderlichen allgemein zu integriren.
§. 314. Ueber die endliche Form des allgemeinen Integrals.
§. 315. Wenn die Form des allgemeinen Integrals $f_{x,y,z,u,v} = 0$ bekannt ist, ω, ω' u. ω'' dazu zu finden.
§. 316. Wie kann aber die Form des (§. 315.) aus einem besonderen Integral gefunden werden?
§. 317. Singuläre Werthe.
§. 318. Eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung mit 4 unabhängigen Veränderlichen allgemein zu integriren.
§. 319. Eine Parzialgleichung der nten Ordnung mit 2, 3, 4 oder m unabhängigen Veränderlichen allgemein zu integriren. Auffindung der singulären Werthe.
§. 320. Von der endlichen Form dieses allgemeinen Integrals.
§. 321. Erstes, zweites ꝛc. rtes Integral einer gegebenen Parzialgleichung der nten Ordnung.
§. 322. Diese Integrale, wenn sie nicht Ur-Integrale sind, sind nicht immer möglich, sondern ihre Auffindung führt zu Bedingungsgleichungen der Integrabilität.

B. Wenn zur Bestimmung einer und derselben Funktion u zwei oder mehrere Parzialgleichungen einer höhern Ordnung gegeben sind. (§§. 323.—326.) . . . . . Pag. 372.—375.

C. Wenn zur Bestimmung mehrerer Funktionen u, v ꝛc. mehrere Parzialgleichungen einer höhern Ordnung gegeben sind. (§. 327.) Pag. 376.

Differenzial- und Integral-Rechnung.

Höhere Zahlenlehre.

Neuntes Kapitel.

Betrachtungen der Ableitungen und Zurückleitungen an den Grenzen. Mehrere der vorhergehenden Lehren theils verallgemeinert, theils in eine, folgenden Zwecken gemäße Form gebracht.

Vorerinnerung.

Je weiter wir in unserem Lehrgebäude fortschreiten, desto mehr muß es uns darum zu thun seyn, nach und nach immer allgemeinere Ansichten zu gewinnen, und Untersuchungen anzustellen, in welchen die früheren als spezielle Fälle wiederum enthalten sind. Wir müssen daher, so wie früher eine nte Ableitung, so jetzt auch eine nte Zurückleitung oder ein ntes Integral näher in's Auge fassen. — Wir haben aber auch die Mittel und Wege zu erleichtern, und übersichtlicher darzustellen, welche in den vorhergehenden Theilen des Systems begründet sind, nun aber oft und mit gewünschtem raschen Erfolge angewandt werden sollen. — Wir müssen lernen, die Summe mehrerer und beliebig vieler einzelnen Glieder mit Integralen und Ableitungen (namentlich von der Form $P_x \cdot \int Q_x \cdot dx$ oder $P_x \cdot \partial Q_x$) in ein einziges Integral oder in eine einzige Ableitung umzuformen. — Wir müssen lernen, bestimmte Integrale in andre gleiche umzuformen, deren beide Grenzen um beliebig viel größer oder um beliebig viel kleiner geworden sind, im additiv-subtraktiven oder auch im multiplikativ-divisiven Sinne. — Wir müssen Funktionen differenziiren und integriren können, welche selber noch nicht hergestellt, sondern bloß angezeigte Integrale oder angezeigte Ableitungen sind. — Wir

haben endlich noch einige frühere, bei der Zerlegung der Integrale angewandte Formeln allgemeiner zu machen, um sie dem praktischen Bedarf näher zu rücken.

Dies alles soll aber im gegenwärtigen 9ten Kapitel gelehrt werden. Das darauf folgende 10te Kapitel dagegen soll ein ntes Integral finden lehren, solches in ein einfaches verwandeln; endlich eine Anwendung geben, durch welche der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz für die Ziffernrechnung eine höchst wichtige Ergänzung erhalten.

Erste Abtheilung.

Summationen mehrerer Glieder mit Ableitungen (oder Differenzialien) von einerlei oder von verschiedenen Ordnungen. Summation mehrerer Glieder mit Integralien. Beliebige Veränderung der Grenzen gegebener bestimmten Integralien.

---

§. 204. Erklärung.

Wir bringen zunächst folgende Zeichen theils in Erinnerung, theils neu hinzu, welche wohl einzuprägen sind:

1) $$[f_x]_y, \quad [\partial^n f_x]_y, \quad \int_y \partial_x \cdot dx$$

bedeuten beziehlich dasjenige, was aus den Funktionen von x, nämlich aus f_x, $\partial^n f_x$, $\int_y f_x \cdot dx$ wird, wenn man irgend einen anderen Ausdruck y statt x setzt.

2) $$[f_x]_{y \div a}, \quad [\partial^n f_x]_{y \div a}, \quad \int_{y \div a} f_x \cdot dx$$

bedeuten dagegen die Differenzen, die man erhält, wenn man in denselben Funktionen von x, zuerst y, dann a, statt x setzt, und letzteres von ersterem subtrahirt. — Demnach ist also

3) $$[f_x]_{y \div a} = [f_x]_y - [f_x]_a,$$

4) $$[\partial^n f_x]_{y \div a} = [\partial^n f_x]_y - [\partial^n f_x]_a$$

5) $$\int_{y \div a} f_x \cdot dx = \int_y f_x \cdot dx - \int_a f_x \cdot dx,$$

wo jedoch in der letzten Gleichung zur Rechten unter $\int f_x \cdot dx$ jedesmal eine und dieselbe Funktion von x (also ein und dasselbe besondere Integral) gedacht werden muß.

So bedeutet ferner $[\partial^n((x+z)^3 \cdot f_z)_z]_x$

das, was man erhält, wenn man von $(x+z)^3 \cdot f_z$ nmal hinter einander die Ableitung nach z nimmt, dann aber zuletzt x statt z schreibt.

Und eben so bedeutet

$$[\partial^n(x^3 \cdot f_z - x^2 \cdot z \cdot f_z + x \cdot z^2 \cdot f_z - z^3 \cdot f_z)_z]_x$$

das, was aus der nten Ableitung nach z von der Funktion

$$x^3 \cdot f_z - x^2 \cdot z \cdot f_z + x \cdot z^2 \cdot f_z - z^3 \cdot f_z$$

wird, wenn man zuletzt x statt z schreibt.

Es wird aber vorzüglich hier noch darauf aufmerksam gemacht, daß wir von nun an nur dann, aber auch dann allemal, eckige Klammern gebrauchen wollen, wenn angedeutet werden soll, daß in dem eingeklammerten Ausdruck statt des Veränderlichen, von welchem er als Funktion angesehen wird, etwas Neues, und zwar das außerhalb der eckigen Klammern unten zur Rechten stehende, gesetzt werden soll.

§. 205. Zusatz.

Nun ist zunächst wohl zu beachten, daß überall, wo nach beendigtem Differenziiren oder Integriren der Funktionen f_x nach irgend einem Variablen x, statt dieses letztern irgend ein neuer Ausdruck y oder a gesetzt werden soll, — es einerlei ist, welchen andern, dem f_x fremden Buchstaben z, u, v, ꝛc. man vor dem Differenziiren oder vor dem Integriren, statt dieses Veränderlichen x setzen mag. — Es ist also namentlich

1) $[f_x]_y = [f_z]_y = [f_u]_y = [f_v]_y =$ ꝛc.;

2) $[\partial^n f_x]_y = [\partial^n f_z]_y = [\partial^n f_u]_y = [\partial^n f_v]_y$ ꝛc.;

3) $\int_y f_x \cdot dx = \int_y f_z \cdot dz = \int_y f_u \cdot du = \int_y f_v \cdot dv =$ ꝛc.;

wenn nur z, u, v, ꝛc. in f_x selbst nicht vorkommen, und wenn zugleich unter f_z, f_u, f_v ꝛc. das verstanden wird, was aus f_x hervorgeht, so oft man z oder u oder v oder ꝛc. statt x schreibt.

Aber es ist dann auch:

4) $[f_x]_{y+a} = [f_z]_{y+a} = [f_u]_{y+a} =$ ꝛc. ꝛc.

5) $[\partial^n f_x]_{y \div a} = [\partial^n f_z]_{y \div a} = [\partial^n f_u]_{y \div a} = \partial^n f_y - \partial^n f_a$

6) $\int_{x \div a} f_x \cdot dx = \int_{x \div a} f_z \cdot dz = \int_{x \div a} f_u \cdot du =$ ꝛc. ꝛc.

§. 206. Zusatz.

Die nächste Anwendung, welche man von dieser eben erwähnten Wahrheit machen kann, besteht darin, Produkte von der Form $P_x \cdot \partial^n Q_x$, $P_x \cdot \int Q_x \cdot dx$ in bloße Ableitungen oder in bloße Integrale umzuwandeln. Man hat nämlich, wenn z weder in P_x noch in Q_x vorkommt,

1) $P_x \cdot \partial^n Q_x = \left[\partial^n (P_x \cdot Q_z)_z\right]_x = \left[\frac{d^n (P_x \cdot Q_z)}{dz^n}\right]_x$,

2) $P_x \cdot \int Q_x \cdot dx = \int_x (P_x \cdot Q_z) \cdot dz$,

3) $[P_x \cdot \partial^n Q_x]_{x \div a} = [\partial^n (P_x \cdot Q_z)_z]_x - [\partial^n (P_x \cdot Q_z)_z]_a$,

4) $P_x \cdot \int_{x \div a} Q_x \cdot dx = \int_{x \div a} (P_x \cdot Q_z) \cdot dz$ u. s. w. f.

§. 207. Zusatz.

Die nächste Anwendung, die man aber wieder hievon machen kann, ist die, daß man die Summe von Produkten von der Form

$$P_x \cdot \partial^n Q_x \text{ oder } P_x \cdot \int Q_x \cdot dx$$

bequem in eine einzige Ableitung, oder in ein einziges Integral umformen kann. — Man hat nämlich:

1) $P_x \cdot \partial^n Q_x + P'_x \cdot \partial^n Q'_x + P''_x \cdot \partial^n Q''_x$
$= [\partial^n (P_x \cdot Q_z + P'_x \cdot Q'_z + P''_x \cdot Q''_z)_z]_x$

2) $P_x \cdot \int_{b \div a} Q_x \cdot dx + P'_x \cdot \int_{b \div a} Q'_x \cdot dx + P''_x \cdot \int_{b \div a} Q''_x \cdot dx$
$= \int_{b \div a} (P_x \cdot Q_z + P'_x \cdot Q'_z + P''_x \cdot Q''_z) \cdot dz$

u. s. w. f.

Wie wichtig dies aber wird, mag nun in einigen Beispielen noch besonders nachgewiesen werden.

Beispiel 1. Hat man z. B. die Reihe von 4 Gliedern

$$\tfrac{1}{6}x^3 \cdot \partial^n f_x + \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \partial^n (x \cdot f_x)_x + \tfrac{1}{2}x \cdot \partial^n (x^2 \cdot f_x)_x + \tfrac{1}{6}\partial^n (x^3 \cdot f_x)_x,$$

so erhält man dafür sogleich

$$\left[\partial^n \left(\tfrac{1}{6}x^3 \cdot f_z + \tfrac{1}{2}x^2 z \cdot f_z + \tfrac{1}{2}x z^2 \cdot f_z + \tfrac{1}{6}z^3 \cdot f_z\right)_z\right]_x;$$

dann

$$\left[\partial^n \left(\left(\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 z + \tfrac{1}{2}x z^2 + \tfrac{1}{6}z^3\right) \cdot f_z\right)_z\right]_x,$$

also auch zuletzt, weil $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2z+\frac{1}{2}xz^2+\frac{1}{6}z^3=\frac{1}{6}(x+z)^3$ ist,

$$\left[\partial^n\left(\frac{(x+z)^3}{6}\cdot f_z\right)_z\right]_x \text{ oder } \frac{1}{6}\left[\partial^n\left((x+z)^3\cdot f_z\right)_z\right]_x.$$

Beispiel 2. So findet man

$$x^4\cdot\partial f_x+x^3\cdot\partial(xf_x)_x+x^2\cdot\partial(x^2f_x)_x+x\cdot\partial(x^3f_x)_x+\partial(x^4f_x)_x$$
$$=\left[\partial\left((x^4+x^3z+x^2z^2+xz^3+z^4)\cdot f_z\right)_z\right]_x$$
$$=\left[\partial\left(\frac{x^5-z^5}{x-z}\cdot f_z\right)_z\right]_x,$$

weil $x^4+x^3z+x^2z^2+xz^3+z^4=\frac{x^5-z^5}{x-z}$ ist.

Beispiel 3. Desgleichen ergiebt sich

$$S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^a}{a!}\cdot\partial^n\left(\frac{x^b}{b!}\cdot u_x\right)_x\right]_{a+b=m}=\left[\partial^n\left(S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^az^b}{a!\,b!}\cdot u_z\right]_{a+b=m}\right)_z\right]_x$$
$$=\left[\partial^n\left(\frac{(z-x)^m}{m!}\cdot u_z\right)_z\right]_x,$$

weil nach dem binomischen Lehrsatze (§. 402. d. II. Th. d. S.)

$$S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^a\cdot z^b}{a!\;b!}\right]_{a+b=m}=\frac{(z-x)^m}{m!}$$ ist.

Beispiel 4. Aber eben so hat man

$$x^2\int_{b\div a}f_x\cdot dx-2x\int_{b\div a}x\cdot f_x\cdot dx+\int_{b\div a}x^2\cdot f_x\cdot dx$$
$$=\int_{b\div a}(x^2-2xz+z^2)\cdot f_z\cdot dz=\int_{b\div a}(x-z)^2\cdot f_z\cdot dz.$$

Beispiel 5. Noch ist

$$Sin\,x\cdot\partial^n(Cos\,x\cdot f_x)_x-Cos\,x\cdot\partial^n(Sin\,x\cdot f_x)_x$$
$$=\left[\partial^n\left((Sin\,x\cdot Cos\,z-Cos\,x\cdot Sin\,z)\cdot f_z\right)_z\right]_x$$
$$=\left[\partial^n\left(Sin\,(x-z)\cdot f_z\right)\right]_x.$$

Beispiel 6. Und gerade so hat man

$$Cos(x-a)\cdot\int_{x\div\alpha}Cos\,(x-a)\cdot f_x\cdot dx+Sin(x-a)\cdot\int_{x\div\alpha}Sin(x-a)\cdot f_x\cdot dx$$
$$=\int_{x\div\alpha}\left(Cos\,(x-a)\cdot Cos\,(z-a)\cdot f_z+Sin(x-a)\cdot Sin(z-a)\cdot f_z\right)_z\cdot dz$$
$$=\int_{x\div\alpha}Cos\,(x-z)\cdot f_z\cdot dz=\int_{x\div\alpha}Cos\,(z-x)\cdot f_z\cdot dz.$$

Beispiel 7. Als letztes Beispiel stehe noch

$$S\left[(-1)^b\cdot\frac{x^a}{a!}\int_{x\div\alpha}\frac{x^b}{b!}\cdot f_x\cdot dx\right]_{a+b=m}=\int_{x\div\alpha}S\left[(-1)^b\cdot\frac{x^a}{a!}\cdot\frac{z^b}{b!}\cdot f_z\right]_{a+b=m}\cdot dz$$
$$=\int_{x\div\alpha}\frac{(x-z)^m}{m!}\cdot f_z\cdot dz,$$

weil nach dem binomischen Lehrsatze

$$S\left[(-1)^b \cdot \frac{x^a \cdot z^b}{a!\ b!}\right] = \frac{(x-z)^m}{m!} \text{ ist.}$$
$$a+b=m$$

§. 208. Zusatz.

Sind die Ableitungen, welche auf diesem Wege summirt, d. h. in eine einzige Ableitung gebracht werden sollen, von verschiedenen Ordnungen, so kann und muß man sie vorher alle auf einerlei Ordnung bringen. Zu diesem Behufe dient aber der Satz (§. 99. II. des IV. Th. d. S.), nach welchem

$$[\partial^n((x-a)^m \cdot f_x)_x]_a = n^{m|-1} \cdot [\partial^{n-m} f_x]_a$$

ist, wo statt $n^{m|-1}$ auch $\frac{n!}{(n-m)!}$ geschrieben werden kann, nach (§. 349. N. 2 d. II. Th. d. S.)

Nach diesem Satze kann man z. B. von jeder Funktion f_x die rte Ableitung nach x, sogleich in jede höhere (r+s)te Ableitung verwandeln, indem man hat

$$(\odot)\cdots\partial^r f_x = [\partial^r f_z]_x = \frac{r!}{(r+s)!} \cdot [\partial^{r+s}((z-x)^s \cdot f_z)_z]_x,$$

unter f das verstanden, was aus f wird, so oft man z statt x setzt, und unter der Voraussetzung, daß der Buchstabe z in f_x gar nicht vorkommt.

Beispiel 1. Ist z. B. zusammenzufassen

$$f_x + \partial f_x + \tfrac{1}{2}\partial^2 f_x + \tfrac{1}{6}\partial^3 f_x + \tfrac{1}{24}\partial^4 f_x,$$

so bekommt man, wenn jede dieser Ableitungen in die 4te umgeformt wird, dafür zunächst

$$\frac{1}{4!}\left[\partial^4([(z-x)^4+(z-x)^3+(z-x)^2+(z-x)+1]\cdot f_z)_z\right]_x,$$

und dann sogleich

$$\frac{1}{4!}\left[\partial^4\left(\frac{(z-x)^5-1}{z-x-1}\cdot f_z\right)_z\right]_x.$$

Beispiel 2. Es seyen die n ersten Glieder der allgemeinen Maclaurin'schen Reihe (§. 14. d. III. Th. d. S.) nämlich

$$[y_x]_a + [\partial y\ ]_a \cdot (x-a) + [\partial^2 y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + [\partial^3 y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^3}{3!}$$
$$+\cdots+ [\partial^{n-1} y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

oder $$S\left[[\partial^a y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^a}{a!}\right]_{a+b=n-1}$$

in eine einzige $(n-1)$te Ableitung zusammenzufassen.

Man hat, sobald $a+b=n-1$ ist, nach $(\odot)$:

$$[\partial^a y_x]_a = [\partial^a y_z]_a = \frac{a!}{(n-1)!}[\partial^{n-1}((z-a)\cdot y_z)_z]_a;$$

also ist die gegebene Summe

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\partial^{n-1}\left(S\left[(x-a)^a \cdot (z-a)^b \cdot y_z\right]_{a+b=n-1}\right)_z\right]_a$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\partial^{n-1}\left(\frac{(x-a)^n-(z-a)^n}{x-z}\cdot y_z\right)_z\right]_a,$$

weil $$S\left[(x-a)^a \cdot (z-a)^b\right]_{a+b=n-1} = \frac{(x-a)^n-(z-a)^n}{(x-a)-(z-a)}$$ ist,

womit man die Aufgabe gelöst hat.

Setzt man noch überdies voraus, daß y_z für $x=a$ nicht die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, d. h. daß y_z nicht mehr $x-a$ oder irgend eine positive Potenz von $x-a$ im Nenner habe, so wird noch überdies, nach demselben (§. 99. II. d. IV. Th. d. S.)

$$\left[\partial^{n-1}\left((z-a)^n \cdot \frac{y_z}{x-z}\right)_z\right]_a = 0,$$

und die obigen ersten n Glieder der allgemeinern Maclaurin'schen Reihe sind dann zusammengefaßt in dem Ausdruck

$$\frac{1}{(n-1)!}\left[\partial^{n-1}\left(\frac{(x-a)^n \cdot y_z}{x-z}\right)_z\right]_a$$

Anmerkung. Obgleich diese hier entstehenden Resultate bloße Symbole sind, welche in ihrer Entwicklung die einzelnen Glieder wieder geben, so können solche Umformungen doch eben den Nutzen gewähren, welchen man etwa hat, wenn die Glieder $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ in das Symbol $\frac{a^4-b^4}{a-b}$ zusammengefaßt werden. Und die Folge wird dies in der That bestätigen. — Hier nur vorläufig ein einziges Beispiel. — Es sey nämlich gegeben die Reihe

$$(\sigma)\cdots \quad S[n_b \cdot \partial^{n-b} u_x \cdot \partial^b v_x] \text{ oder } S\left[\frac{n!}{a!\,b!}\cdot \partial^a u_x \cdot \partial^b v_x\right]_{a+b=n}$$

d. h. $u_x \cdot \partial^n v_x + n \cdot \partial u_x \cdot \partial^{n-1} v_x + n_2 \cdot \partial^2 u_x \cdot \partial^{n-2} v_x + \cdots$

$+ \cdots + n_2 \cdot \partial^{n-2} u_x \cdot \partial^2 v_x + n \cdot \partial^{n-1} u_x \cdot \partial v_x + v_x \cdot \partial^n u_x$

und es soll solche summirt, d. h. in ein Glied zusammengefaßt werden. Wenn z, y Buchstaben sind, welche weder in u_x noch in v_x vorkommen, wenn endlich u_z und v_z beziehlich das bedeuten, was aus u_x, v_x wird, sobald man beziehlich z, y statt x schreibt, so hat man nach (§. 208 · ⊙) und nach der Bezeichnung des (§. 204.):

$$\left.\begin{aligned} \partial^a u_x &= \frac{a!}{n!} \cdot [\partial^n ((z-x)^b \cdot u_z)_z]_x \\ \partial^b v_x &= \frac{b!}{n!} \cdot [\partial^n ((y-x)^a \cdot v_y)_y]_x \end{aligned}\right\} \text{für } a+b = n.$$

Folglich ist die gesuchte Summe (♂) jetzt

$$(♄) \cdots = \frac{1}{n!} \cdot S \Big[[\partial^n ((z-x)^b \cdot u_z)_z]_x \cdot [\partial^n ((y-x)^a \; v_y)_y]_x \Big]_{a+b = n}.$$

Nun ist aber, weil u_z kein y, und v_y kein z enthält,

$$[\partial^n ((z-x)^b \cdot u_z)_z]_x \cdot [\partial_n ((y-x)^a \cdot v_y)_y]_x$$

$$= \Big[\partial^n \Big((z-x)^b \cdot u_z [\partial^n ((y-x)^a \cdot v_y)_y]_x\Big)_z\Big]_x$$

$$= \Big[\partial^n \Big([\partial^n ((z-x)^b \cdot (y-x)^a \cdot u_z \cdot v_y)_y]_x\Big)_z\Big]_x$$

und noch überdies nach den ersten Elementen der Buchstabenrechnung

$$S[(z-x)^b \cdot (y-x)^a]_{a+b = n} = \frac{(z-x)^{n+1} - (y-x)^{n+1}}{(z-x) - (y-x)}$$

$$= \frac{(z-x)^{n+1} - (y-x)^{n+1}}{z-y};$$

folglich ist unsere Summe (♂ oder ♄) jetzt

$$(♐) \cdots = \frac{1}{n!} \Big[\partial^n \Big(\Big[\partial^n \Big(\frac{(z-x)^{n+1} - (y-x)^{n+1}}{z-y} \cdot u_z v_y \Big)_y \Big]_x \Big)_z \Big]_x$$

Weil aber der mit $(y-x)^{n+1}$ behaftete Theil n mal nach y differenziirt, für $y = x$ verschwindet (nach §. 99. II. d. IV. Th. d. S.), so wird diese Summe (♐) wiederum

$$(⊙) \cdots = \frac{1}{n!} \Big[\partial^n \Big((z-x)^{n+1} \cdot \Big[\partial^n \Big(\frac{v_y \cdot u_z}{z-y} \Big)_y \Big]_x \Big)_z \Big]_x.$$

Obgleich nun diese eben gefundene Summe (⊙) bloßes Symbol ist, so kann man doch dieselbe weiter so behandeln:

Nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze kann man u_z und v_y in Reihen verwandeln, die nach Potenzen von z—a und y—a fortlaufen; also hat man nachher

$$\frac{u_z - u_y}{z-y} = \pi_{z,y} \text{ d. h. I. } \frac{u_z}{z-y} = \frac{u_y}{z-y} + \pi_{z,y},$$

wo $\pi_{z,y}$ eine Funktion von z und y vorstellt, welche z—y auf keine Weise mehr im Nenner hat, d. h. welche für z=y nicht die Form $\frac{1}{0}$ annehmen kann; also ist auch aus (I.)

$$\text{II. } \left[\partial^n\left(v_y \cdot \frac{u_z}{z-y}\right)_y\right]_x = \left[\partial^n\left(\frac{(vu)_y}{z-y}\right)_y\right]_x + \left[\partial^n\left(v_y \cdot \pi_{z,y}\right)_y\right]_x,$$

wo $\partial^n(v_y \cdot \pi_{z,y})_y$ kein z—y im Nenner, jedoch jede positive Potenz von z—y als Faktor haben kann. Nimmt man endlich von $\frac{(vu)_y}{z-y}$ nach und nach n mal hinter einander die Ableitungen nach y und setzt man zuletzt x statt y, so erhält man

$$\text{III. } \left[\partial^n\left(\frac{(vu)_y}{z-y}\right)_y\right]_x = \frac{\partial^n (vu)_x}{z-x} + \left\{\begin{array}{l}\text{einer Reihe von Gliedern,}\\ \text{welche höhere Potenzen v.}\\ z-x, \text{ zuletzt } (z-x)^{n+1}\\ \text{im Nenner haben.}\end{array}\right\}$$

Wird daher (II.) mit $(z-x)^{n+1}$ noch multiplizirt, so erhält man mit Zuziehung von (III.)

$$\text{IV. } (z-x)^{n+1} \cdot \left[\partial^n\left(\frac{v_y \cdot u_z}{z-y}\right)_y\right]_x$$

$$= (z-x)^n \cdot \partial^n (vu)_x + \left\{\begin{array}{l}\text{einer Reihe von Gliedern, welche}\\ \text{theils höhere (von } \pi_{z,y} \text{ herrühr-}\\ \text{rende), theils niedrigere Potenzen}\\ \text{von z—x als die nte zu Fakto-}\\ \text{ren haben.}\end{array}\right\}$$

In diesen letztern Gliedern kommt außerdem kein z vor, also werden sie alle, sobald man sie n mal nach z differenziirt, für z=x der Null gleich; demnach wird die oben gefundene Summe (⊙) mit Zuziehung der (IV.) jetzt

$$= \frac{1}{n!}\Big[\partial^n\Big((z-x)^n \cdot \partial^n (uv)^x\Big)_z\Big]_x = \partial^n (uv)_x;$$

alles nach (§. 99. II. d. IV. Th. d. S.)

Während wir also im (§. 97. d. IV. Th. d. S.) die Ableitung $\partial^n (uv)_x$ gleich gefunden haben der oben (hier) gegebenen Reihe von $(n+1)$ Gliedern; so ist jetzt umgekehrt diese Reihe von $n+1$ Gliedern wiederum in das einzige Glied $\partial^n (uv)_x$ vereinigt worden.

Wenn aber diese Aufgabe, weil das Resultat gewissermaßen schon bekannt war, bloß eine müßige zu seyn scheint, so kann man doch auf demselben Wege zu Summen anderer Reihen gelangen, namentlich auch zur Summirung der Reihen, zu welchen Cauchy (Exercises de Mathém.) seinen Calcul des résidus anwenden zu müssen geglaubt hat, während man sich hier bei allen solchen Aufgaben ein für allemal nur an die hier ausgesprochenen Prinzipien und an den hier so wichtigen Satz (§. 99. II. d. IV. Th. d. S.) nämlich daß

$$\left[\partial^n ((z-x)^m \cdot f_z)_z\right]_x = n^{m|-1} \cdot \left[\partial^{n-m} f_z\right]_x \text{ ist,}$$

zu halten hat.

Anmerkung 2. Es ist sehr merkwürdig, daß in dem Ausdruck (Anmerkung 1. (⊙)) die Ordnung des Differenziirens nicht umgekehrt werden darf. Wollte man nämlich $u_z \cdot v_y \cdot \frac{(z-x)^{n+1}}{z-y}$ zuerst n mal nach z differenziiren, so erhielte man scheinbar, für $z = x$, Null zum Resultat, welches nach y differenzirt dann wiederum Null wird. Eigentlich kommt aber $\frac{x-x}{x-y} \cdot u_x \cdot v_y$, welches n mal nach y differenziirt, für $y = x$, in $\frac{0}{0}$ übergeht. — Und wollte man zuerst nach z, dann nach y differenziiren, und zuletzt erst x für z und für y zugleich setzen, so erhielte man wiederum Glieder von der Form $\frac{0}{0}$. Ja dasselbe, nämlich Glieder von der Form $\frac{0}{0}$, würde man erhalten, wenn man in der-

selben Ordnung wie der Ausdruck $(\odot)$ es verlangt, differenziiren, dagegen nicht unmittelbar nach beendigtem ersten Differenziiren x statt y setzen wollte, sondern erst ganz zuletzt dieses x statt z und statt y zugleich setzte. Dagegen findet man den Ausdruck $(\ddagger)$ offenbar auch

$$= \frac{1}{n!} \cdot \left[\partial^n \left(\left[\partial^n \left(\frac{(z-x)^{n+1} - (y-x)^{n+1}}{z-y} \cdot u_z v_y \right)_z \right]_x \right)_y \right]_x$$

also auch

$$= \frac{1}{n!} \cdot \left[\partial^n \left(\left[\partial^n \left(\frac{(y-x)^{n+1}}{y-z} \cdot u_z v_y \right)_z \right]_x \right)_y \right]_x,$$

und dies führt abermals zu demselben, vorhin schon gefundenen Resultat $\partial^n (uv)_x$, wenn man nur genau in der hier vorgezeichneten Ordnung verfährt, und übrigens wie vorhin, die geeigneten Mittel anwendet, um vor dem Differenziiren nach z, lauter Glieder von der Form

$$\frac{\varphi_z}{(y-z)^a} \text{ oder } (y-z)^b \cdot \varphi_z,$$

also nach dem Differenziiren nach z, und wenn x statt z gesetzt, auch bereits mit $(y-x)^{n+1}$ multiplizirt ist, lauter Glieder von der Form

$$(y-x)^a \cdot \varphi_x$$

zu erhalten, welche nachgehends n mal nach y differenziirt, für $y=x$ allemal 0 (Null) geben, den einzigen Fall abgerechnet, wo $a=n$ ist, und welcher $n! \varphi_x$ gibt.

Wir wenden uns aber nun zu andern hieher gehörigen Betrachtungen.

§. 209. Lehrsatz und Beweis.

Es ist allemal

1) $$[\partial^n f_x]_{x+h} = [\partial^n f_y]_{x+h} = \partial^n (f_{x+h})_x = \partial^n (f_{x+h})_h ;$$

und noch allgemeiner

2) $$[\partial^n f_x]_{px+h} = \frac{1}{p^n} \cdot \partial^n (f_{px+h})_x = \partial^n (f_{px+h})_h \text{ *).}$$

---

*) Es wird noch einmal darauf aufmerksam gemacht, daß $\partial^n (f_{x+h})_h$ die nte Ableitung nach h bedeutet von f_{x+h}, d. h. von dem, was aus f_x

Denn setzt man

$$px+h = u, \text{ so hat man}$$

$$\partial u_x = p,\ \partial^2 u_x = \partial^3 u_x = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0,$$

$$\partial u_h = 1,\ \partial^2 u_h = \partial^3 u_h = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0,$$

also nach (§. 58. d. III. Th. d. S.)

$$\partial^n (f_u)_x = \partial^n f_u \cdot \partial u_x{}^n = [\partial^n f_x]_u \cdot \partial u_x{}^n = [\partial^n f_x]_{px+h} \cdot p^n,$$

u. s. f.

Daraus folgt aber weiter:

$$3)\ [\partial^n f_x]_{(pb+h)\div(pa+h)} = \frac{1}{p^n} \cdot [\partial^n (f_{px+h})_x]_{b\div a}$$

d. h.

$$[\partial^n f_x]_{pb+h} - [\partial^n f_x]_{pa+h} = \frac{1}{p^n} \cdot \left([\partial^n (f_{px+h})_x]_b - [\partial^n (f_{px+h})_x]_a \right).$$

§. 210. Lehrsatz.

Aber auf eben die Weise hat man noch

$$\int_{px+h} f_x \cdot dx = p \cdot \int_x f_{px+h} \cdot dx,$$

wenn nur die Konstanten in diesen allgemeinen Integralen so genommen werden, daß diese Gleichung für irgend einen Werth von x identisch ist.

Beweis folgt unmittelbar aus (§§ 165—168. d. IV. Th. d. S.). Ist nämlich $px+h = u$, so ist $\partial u_x = p$ und

$$\int_{px+h} f_x \cdot dx = \int_u f_x \cdot dx = \int f_u \cdot du = \int (f_u \cdot \partial u_x) \cdot dx$$

$$= p \cdot \int f_u \cdot dx = p \cdot \int f_{px+h} \cdot dx.$$

§. 211. Zusatz.

Also ist auch

$$\int_{(pb+h)\div(pa+h)} f_x \cdot dx = p \cdot \int_{b\div a} f_{px+h} \cdot dx.$$

---

wird, wenn man $x+h$ statt x schreibt. Also bedeutet $\partial^n (f_{px+h})_h$ die nte Ableitung nach h von dem, was aus f_x wird, sobald man $px+h$ statt x setzt. Und $\partial^n (f_{px+h})_x$ bedeutet die nte Ableitung nach x von f_{px+h}. Dagegen bedeutet $[\partial^n f_y]_{x+h}$ das, was aus $\partial^n f_y$ hervorgeht, wenn (nach beendigter nfacher Ableitung) $x+h$ statt y gesetzt wird. Und $[\partial^n f_x]_{px+h}$ bedeutet das, was aus $\partial^n f_x$ wird, wenn man (nach beendigtem Geschäft des nfachen Ableitens) $px+h$ statt x schreibt.

§. 212. Zusatz.

Setzt man hier $h = o$, so erhält man

1) $\int_{pb \div pa} f_x \cdot dx = p \cdot \int_{b \div a} f_{px} \cdot dx$;

und, wenn $\frac{1}{p}$ statt p geschrieben wird,

2) $\int_{(b:p) \div (a:p)} f_x \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot \int_{b \div a} f_{(x:p)} \cdot dx$.

Setzt man dagegen im (§. 211.) $p = 1$, so wird

3) $\int_{(b+h) \div (a+h)} f_x \cdot dx = \int_{b \div a} f_{x+h} \cdot dx$,

und wenn hier $-h$ statt h geschrieben wird,

4) $\int_{(b-h) \div (a-h)} f_x \cdot dx = \int_{b \div a} f_{x-h} \cdot dx$.

Wird endlich (im §. 211.) $p = -1$ gesetzt, so erhält man

5) $\int_{(h-b) \div (h-a)} f_x \cdot dx = -\int_{b \div a} f_{h-x} \cdot dx = \int_{a \div b} f_{h-x} \cdot dx$.

§. 213. Zusatz.

Diese Sätze sind deshalb so wichtig, weil man sich derselben bedienen kann, um ein Integral zwischen gegebenen Grenzen a und b in ein anderes bestimmtes Integral zu verwandeln, dessen Grenzen um eine beliebige Zahl h vermehrt oder vermindert sind, oder dessen Grenzen beliebig Vielfache oder beliebig vielte Theile der vorherigen Grenzen werden sollen. — Für diesen praktischen Zweck ist es aber bequem, die Formeln (1—5.) des vorhergehenden (§. 212.), wie folgt, umzuformen.

Man setze nämlich in (1. des §. 212.) $\frac{b}{p}$ und $\frac{a}{p}$ beziehlich statt b und a, und man erhält

1) $\int_{b \div a} f_x \cdot dx = p \cdot \int_{(b:p) \div (a:p)} f_{px} \cdot dx$.

Wird aber in (2. des §. 212.) pb und pa beziehlich statt b und a gesetzt, so geht hervor:

2) $\int_{b \div a} f_x \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot \int_{pb \div pa} f_{(x:p)} \cdot dx$.

Setzt man ferner in (3.) b—h und a—h, dagegen in (4.) b+h und a+h beziehlich statt b und a, so erhält man:

3) $\int_{b \div a} f_x \cdot dx = \int_{(b-h) \div (a-h)} f_{x+h} \cdot dx$

4) $\int_{b \div a} f_x \cdot dx = \int_{(b+h) \div (a+h)} f_{x-h} \cdot dx$;

und setzt man in (5. des §. 212.) a+b statt h, so ergibt sich noch

$$\int_{a\div b} f_x \cdot dx = \int_{a\div b} f_{a+b-x} \cdot dx$$

oder, wenn man hier a und b mit einander vertauscht,

5) $\int_{b\div a} f_x \cdot dx = \int_{b\div a} f_{a+b-x} \cdot dx.$

In diesen 5 Formeln hat man links immer ein und dasselbe, zwischen den Grenzen a und b genommene Integral, während zur Rechten jedesmal die neuen Integrale mit den vermehrten oder verminderten oder beibehaltenen Grenzen stehen.

Anmerkung 1. Man wird sich, unter andern Anwendungen dieser Formeln, derselben späterhin auch dazu bedienen, um ein Integral zwischen den Grenzen a und b, in ein anderes zu verwandeln, welches zwischen den Grenzen o und b—a genommen ist, und umgekehrt; desgleichen um ein Integral zwischen den Grenzen o und b in ein anderes zu verwandeln, das zwischen den Grenzen $\frac{o}{b}$ und $\frac{b}{b}$ d. h. zwischen den Grenzen o und 1 genommen ist, und umgekehrt, während in letzterer Umformung b beliebig groß, also auch unendlich groß seyn kann.

Anmerkung 2. Bedenkt man, daß der Satz (§§. 167. 168. d. IV. Th. d. S.) der einzige ist, welcher ein bestimmtes Integral in ein anderes zu verwandeln lehrt, das nach einem gegebenen Gesetze abgeänderte Grenzen hat, und daß die hier (§§. 211—213.) entwickelten Sätze, behufs der Umformung bestimmter Integrale, bloße einfache Fälle jenes allgemeinen Satzes sind; so hat man zu gleicher Zeit das Mittel in Händen, wenn solches einmal in der Folge nöthig werden sollte, um ein Integral zwischen gegebenen Grenzen a und b, nämlich $\int_{b\div a} f_x \cdot dx$, in ein anderes zu verwandeln, welches zwischen Grenzen α und β genommen ist, so daß $\beta = \varphi_b$ und $\alpha = \varphi_a$, φ_c aber eine ganz beliebige Zusammensetzung aus c (d. h. eine beliebige Funktion von c) ist. Man löst zu dem Behufe bloß die Gleichung $\beta = \varphi_b$ oder $\alpha = \varphi_a$ auf nach b oder nach a, oder besser $u = \varphi_v$ nach v, so daß man erhält $v = \psi_u$, also $b = \psi_\beta$, $a = \psi_\alpha$, und man hat dann

$$(\odot)\cdots \quad \int_{b\div a} f_x \cdot dx = \int_{\beta\div\alpha} (f_\psi \cdot \partial\psi_x) \cdot dx,$$

unter ψ jetzt das verstanden, was aus ψ_u für $u = x$ hervorgeht. Diese Formel begreift die des (§. 211.), so wie natürlich auch alle die Formeln der (§§. 212. 213.) in sich, nebst noch vielen andern ähnlichen besondern Resultaten.

Enthält dann die Zusammensetzung φ auch beliebige noch unbestimmte Werthe p, h, ꝛc. ꝛc., so kann man nachgehends letztere so annehmen, daß aus

$$u = \varphi_v \quad \text{oder} \quad v = \psi_u,$$

für $u = b$, $v = \beta = a$ und für $u = a$, $v = \alpha = b$ hervorgeht, so daß man dann hat

$$(\mathfrak{C}) \cdots \int_{b \div a} f_x \cdot dx = \int_{a \div b} (f_\psi \cdot \partial \psi_x) \cdot dx = \int_{b \div a} (-f_\psi \cdot \partial \psi_x) \cdot dx,$$

durch welche Formel ein zwischen den Grenzen a und b genommenes Integral in ein anderes verwandelt wird, welches zwischen denselben Grenzen, aber aus einer andern Funktion genommen ist. — In dieser Formel ($\mathfrak{C}$) steckt aber die (5. des §. 213.).

Zweite Abtheilung.

Begriff des nten Integrals. Differenziiren und Integriren unter dem Differential- und Integral-Zeichen. Allgemeinere Formeln zur Zerlegung gegebener Integrale.

---

§. 214. Erklärung.

Da jedes besondere und jedes allgemeine Integral von ψ_x nach x, allemal wieder eine Funktion von x ist, so kann man von ihr jedesmal wieder ein besonderes oder ein allgemeines Integral nehmen; u. s. w. f.

Unter einer nten Zurückleitung oder unter einem nten Integral einer gegebenen Funktion ψ_x nach x, welches man allemal durch $\partial^{-n} \psi_x$ oder $\int^n \psi_x \cdot dx^n$ bezeichnet, versteht man die Funktion von x, welche entsteht,

wenn man f_x auf die eben bezeichnete Weise n mal hinter einander integrirt, so daß solche offenbar n willkührliche (nach x) konstante Ausdrücke in sich aufnimmt.

Ist z. B. $f_x = ax^b$, so hat man

$$\int f_x \cdot dx = \frac{ax^{b+1}}{b+1} + C,$$

$$\int^2 f_x \cdot dx = \frac{ax^{b+2}}{(b+1)(b+2)} + Cx + C_1,$$

$$\int^3 f_x \cdot dx^3 = \frac{ax^{b+3}}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \tfrac{1}{2}C \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2,$$

u. s. w. f.

Nach dieser Bezeichnung ist übrigens allemal

$$\int^1 \psi_x \cdot dx^1 = \int \psi_x \cdot dx.$$

§. 215. Zusatz.

Nimmt man von f_x das nte Integral nach x, jedesmal aber nur besondere Integrale, und ist φ_x das Endresultat dieser nfachen Integration, so hat man nothwendig

$$1)\ \int^n \psi_x \cdot dx^n = \varphi_x + S[C_a \cdot x^a]_{a+b=n-1},$$

d. h. das allgemeine nte Integral besteht aus dem Resultat φ_x einer nfachen Integration, bei welcher man jedesmal irgend welche besondere Integrale genommen hat, und noch einer ganzen Funktion von x mit n willkührlichen Koeffizienten $C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n-1}$.

Da man diesen letztern Theil auch in anderer Form schreiben kann, so hat man noch

$$2)\ \int^n \psi_x \cdot dx^n = \varphi_x + S[C_a \cdot (x-x_a)^a]_{a+b=n-1},$$

wo x_a d. h. $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}$ ganz beliebig gewählte Ziffernwerthe seyn können, während $C_0, C_1, C_2, \cdots C_{n-1}$ willkührlich konstant (nach x) gedacht sind. — Dann auch

$$3)\ \int^n \psi_x \cdot dx^n = \varphi_x + S\left[C_a \cdot \frac{(x-a)^a}{a!}\right]_{a+b=n-1}$$

oder auch

$$4)\ \int^n \psi_x \cdot dx^n = \varphi_x + S[C_a \cdot (x-a)^a]_{a+b=n-1},$$

wo a ein ganz beliebiger Ziffernwerth ist.

In jedem besondern Falle kommt es also nur darauf an, n mal hinter einander aus ψ_x besondere Integrale (ohne willkührliche Konstante) zu nehmen, um φ_x zu erhalten, weil man das allgemeinste nte Integral mit den n willkührlichen Konstanten dann augenblicklich hat.

§. 216. Zusatz.

Soll jedes dieser n auf einander folgenden Integrale mit $x = a$ anfangen, so kann solches noch sehr bequem durch

$$\int_{x\div a}^{n} \psi_x \cdot dx^n$$

bezeichnet werden.

So hat man z. B.

$$\int_{x\div a} x^3 \cdot dx = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}a^4;$$

$$\int_{x\div a}^{2} x^3 \cdot dx^2 = \tfrac{1}{20}(x^5 - a^5) - \tfrac{1}{4}a^4(x-a) = \tfrac{1}{20}x^5 - \tfrac{1}{4}a^4x + \tfrac{1}{5}a^5;$$

$$\int_{x\div a}^{3} x^3 \cdot dx^3 = \tfrac{1}{120}(x^6 - a^6) - \tfrac{1}{8}a^4(x^2 - a^2) + \tfrac{1}{5}a^5(x-a)$$

$$= \tfrac{1}{120}x^6 - \tfrac{1}{8}a^4x^3 + \tfrac{1}{5}a^5x - 1\tfrac{1}{2}a$$

u. s. w. f.

Sollen aber die verschiedenen auf einander folgenden Integrale mit verschiedenen Werthen $x_0, x_1, x_2, x_3 \cdots x_{n-1}$ von x anfangen, so kann man dies nicht gut anders als so schreiben:

$$\int_{x\div x_{n-1}} \int_{x\div x_{n-2}} \cdots\cdots \int_{x\div x_2} \int_{x\div x_1} \int_{x\div x_0} \psi_x \cdot dx^n.$$

So hat man z. B., wenn $\psi_x = 1 \cdot x^0 = 1$ gedacht wird.

$$\int_{x\div x_0} 1 \cdot dx = x - x_0;$$

$$\int_{x\div x} \int_{x\div x_0} 1 \cdot dx^2 = \tfrac{1}{2}(x^2 - x_1^2) - x_0(x - x_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 - x_0x + x_1(x_0 - \tfrac{1}{2}x_1);$$

$$\int_{x\div x_2} \int_{x\div x_1} \int_{x\div x_0} 1 \cdot dx^3 = \tfrac{1}{6}(x^3 - x_2)^3 - \tfrac{1}{2}x_0(x^2 - x_2^2)$$

$$+ x_1(x_0 - \tfrac{1}{2}x_1)(x - x_2);$$

u. s. w. f.

§. 217. Zusatz.

Es folgt ferner aus dem Begriff des nten Integrals, wenn $m < n$ ist,

1) $\partial^m\left(\int^n \psi_x \cdot dx^n\right)_x = \int^{n-m} \psi_x \cdot dx^{n-m}$;

und für $m = n$

2) $\partial^n\left(\int^n \psi_x \cdot dx^n\right)_x = \psi_x$,

welche Formel man als schon in der (1.) enthalten ansehen kann, wenn man von jetzt an dem noch bedeutungslosen Zeichen $\int^0 \psi_x \cdot dx^0$ die Bedeutung ψ_x beilegt.

Anmerkung. In der (1.) stecken aber die besondern Fälle

$$\partial\,(\int^n \psi_x \cdot dx^n)_x = \int^{n-1} \psi_x \cdot dx^{n-1};$$
$$\partial^2(\int^n \psi_x \cdot dx^n)_x = \int^{n-2} \psi_x \cdot dx^{n-2};$$
$$\partial^3(\int^n \psi_x \cdot dx^n)_x = \int^{n-3} \psi_x \cdot dx^{n-3};$$
$$\partial^{n-1}(\int^n \psi_x \cdot dx^n)_x = \int \psi_x \cdot dx.$$

§. 218. Zusatz.

Uebrigens ist es nicht schwer, früher mitgetheilte Gesetze der nten Ableitungen auch auf nte Zurückleitungen auszudehnen. Der Kürze wegen heben wir hier nur zweie heraus, nämlich:

1) $S[\int^n \psi_a \cdot dx^n] = \int^n S[\psi_a] \cdot dx^n$

wo ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ꝛc. beliebige Funktionen von x sind, und

2) $\int^n A\psi_x \cdot dx^n = A \cdot \int^n \psi_x \cdot dx^n$.

§. 219. Lehrsatz.

Ist $f_{x,z}$ eine ganz beliebige Funktion von x und von z, so ist allemal, wenn z'' von x unabhängig ist,

I. $$\partial^m(\int^n_{z \div z''} f_{x,z} \cdot dz^n)_x = \int^n_{z \div z''} (\partial^m f_x) \cdot dz^n$$

oder $$\frac{d^m}{dx^m}(\int^n_{z \div z''} f_{x,z} \cdot dz^n) = \int^n_{z \div z''} \left(\frac{d^m f}{dx^m}\right) \cdot dz^n$$

d. h. es ist einerlei, ob man $f_{x,z}$ zuerst n mal nach z integrirt, und dann noch nach x m mal differenziirt, oder ob man in umgekehrter Ordnung zuvor die Differenziation und nachher erst die Integration eintreten läßt, wenn nur jedesmal die Integrale nach z, mit demselben Grenzwerth z'' anfangen, und (diese Bedingung ist vorzüglich zu berücksichtigen) dieser Grenzwerth z'' von z unabhängig ist.

Beweis. Man setze

1) $\int^n_{z \div z''} f_{x,z} \cdot dz^n = \varphi_{x,z,z''} = \varphi$,

und dann x + h statt x, so hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze

2) $$\int^n_{z \div z''} \left(S\left[\partial^a f_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right]\right) \cdot dz^n = S\left[\partial^a \varphi_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right],$$

d. h. weil es einerlei ist, ob man die ganze Reihe integrirt, oder jedes einzelne Glied derselben,

$$3)\quad \mathfrak{S}\left[\frac{h^a}{a!}\cdot\int_{z\div z''}^{n}(\partial^a f_x)\cdot dz^n\right]=\mathfrak{S}\left[\partial^a\varphi_x\cdot\frac{h^a}{a!}\right];$$

folglich ist, da h willkührlich ist, auch der Koeffizient von $\frac{h^m}{m!}$ auf beiden Seiten derselbe, d. h.

$$4)\quad \int_{z\div z''}^{n}(\partial^m f_x)\cdot dz^n=\partial^m\varphi_x,$$

wo man nur noch statt φ dessen Bedeutung aus (1.) zu setzen hat, um sich von der Richtigkeit des Lehrsatzes überzeugt zu haben.

§. 220. Zusatz.

Daraus folgt, wenn auch z', eben so wie z'', von x unabhängig ist,

$$\text{II.}\quad \partial^m\left(\int_{z'\div z''}^{n} f_{x,z}\cdot dz^n\right)_x=\int_{z'\div z''}^{n}(\partial^m f_x)\cdot dz^n$$

oder
$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\int_{z'\div z''}^{n} f_{x,z}\cdot dx^n\right)=\int_{z'\div z''}^{n}\left(\frac{d^m f}{dx^m}\right)\cdot dz^n.$$

§. 221. Zusatz.

Sind also z' und z'' unabhängig von x, so findet sich für $m=n=1$,

$$\text{III.}\quad \partial\left(\int_{z\div z''} f_{x,z}\cdot dz\right)_x=\int_{z\div z''}(\partial f_x)\cdot dx$$

$$\text{IV.}\quad \partial\left(\int_{z'\div z''} f_{x,z}\cdot dz\right)_x=\int_{z'\div z''}(\partial f_x)\cdot dx.$$

§. 222. Lehrsatz.

Sind aber z', z'' selber wieder Funktionen von x, so ist dann wohl zu merken

$$\text{V.}\quad \partial\left(\int_{z'\div z''} f_{x,z}\cdot dx\right)_{(x)}{}^{*})=\int_{z'\div z''}{}''(\partial f_x)\cdot dx + f_{x,z'}\cdot\partial z'_x - f_{x,z''}\cdot\partial z''_x,$$

*) Man erinnere sich noch 1) daß $\partial^m f_x$ identisch ist mit $\frac{d^m f}{dx^m}$, während letztere Zeichen im Sinne der Differenzialrechnung des Leibnitz zu verstehen sind, 2) daß $\partial^m f_{(x)}$ bedeutet die mte Ableitung nach allem x, also identisch ist mit $\frac{d^m f}{dx^m}$ unter der Voraussetzung, daß $d^m f$ das

in welcher Formel $\partial z'_x = 0$ gesetzt werden muß, wenn z' von x unabhängig ist, während $\partial z''_x = 0$ wird, sobald z'' von x unabhängig ist; und diese Formel geht daher in die (IV.) über, sobald z' und z'' von x unabhängig sind, während aus der (IV.) allemal auch die (III.) hervorgeht, wenn man $z' = z$ setzt.

Denn es folgt die Behauptung (V.) sogleich, wenn man bedenkt, daß links (in V.) nach allem x differenziirt ist, und daß, so oft z in $\psi_{x,z}$, selber wieder eine Funktion von x ist, man allemal hat

$$\partial\psi_{(x)} = \partial\psi_x + \partial\psi_z \cdot \partial z \ ,$$

wo $\partial\psi_x$ zur Rechten die Ableitung nach x bedeutet, unter der Voraussetzung, daß z konstant (d. h. von x unabhängig) angesehen wird. (Vgl. §. 37. d. III. Th. d. S.).

Beispiel. Ist z B. $f_{x,z} = x^3 \cdot e^{xz}$, so hat man

$$\int_{z'\div z''} f_{x,z} \cdot dz = (x \cdot e^{xz})_{z'\div z''} = x \cdot e^{xz'} - x \cdot e^{xz''}$$

und

1) $\partial\left(\int_{z'\div z''} f_{x,z} \cdot dz\right)_{(x)}$

$= e^{xz'} - e^{-xz''} + xz' \cdot e^{xz'} - xz'' \cdot e^{xz''} + x^2 \cdot e^{xz'} \cdot \partial z'_x - x^2 \cdot e^{xz''} \cdot \partial z''_x.$

Auf der andern Seite hat man dagegen

$$\partial f_x = 2x \cdot e^{xz} + x^3 z \cdot e^{xz}.$$

Und weil $\int x^2 z \cdot e^{xz} \cdot dz = xz \cdot e^{xz} - e^{xz}$ gefunden wird, so folgt weiter

2) $$\int_{z'\div z''} (\partial f_x) \cdot dz = (e^{xz} + xz \cdot e^{xz})_{z'\div z''}$$

$$= e^{xz'} - e^{xz''} + x \cdot z' \cdot e^{xz'} - x \cdot z'' \cdot e^{xz''};$$

und addirt man hier zu (2) noch

$f_{x,z'} \cdot \partial z'_x - f_{x,z''} \cdot \partial z''_x$ d. h. $x^2 \cdot e^{xz'} \cdot \partial z'_x - x^2 \cdot e^{xz''} \cdot \partial z''_x$,

so kommt wirklich der obige Ausdruck (1.) heraus, wie die Formel (V.) es behauptet.

§. 223. Lehrsatz.

Ist wiederum z'' von x unabhängig, und eben so x'' von z unabhängig, so hat man noch

$$\text{VI.} \quad \int_{x\div x''} \left(\int_{z\div z''} f_{x,z} \cdot dz\right) \cdot dx = \int_{z\div z''} \left(\int_{x\div x''} f_{x,z} \cdot dx\right) \cdot dz$$

---

mte Differenzial ist nach allem x, sowohl nach dem explizit als auch nach dem implizit in f enthaltenen. Für letzteres Zeichen findet man auch zuweilen $\frac{d^m f}{dx^m}$ oder $\frac{1}{dx^m} \cdot d^m(f)$.

d. h. es ist einerlei, ob man zuerst nach z und dann nach x, oder umgekehrt zuerst nach x und dann nach z integrirt, wenn nur die jedesmaligen Grenzen des Integrals von dem andern Veränderlichen unabhängig sind.

Beweis. Denn es sey $\psi_{x,y}$ die Funktion, welche einmal nach x und einmal nach y abgeleitet $f_{x,y}$ wieder gibt, so hat man

1) $\partial^{1,1}\psi_{x,y} = f_{x,y}$,

also, weil $\partial^{1,1}\psi_{x,y} = \partial(\partial\psi_x)_y = \partial(\partial\psi_y)_x$ ist, eben so wohl

2) $\partial(\partial\psi_x)_y = f_{x,y}$,

als auch

3) $\partial(\partial\psi_y)_x = f_{x,y}$.

Aus (2.) folgt nun sogleich

4) $\int_{y\div y''} f_{x,y}\cdot dy = [(\partial\psi_x)_y]_{y\div y''}$ *) $= \partial(\psi_{x,y} - \psi_{x,y''})_x$;

und nun aus (4.) wiederum

5) $\int_{x\div x''}\left(\int_{y\div y''} f_{x,y}\cdot dy\right)\cdot dx = [(\psi_{x,y} - \psi_{x,y''})_x]_{x\div x''}$
$= \psi_{x,y} - \psi_{x,y''} - \psi_{x'',y} + \psi_{x'',y''}$.

Aus (3.) dagegen ergibt sich unmittelbar

6) $\int_{x\div x''} f_{x,y}\cdot dx = [(\partial\psi_y)_x]_{x\div x''} = \partial(\psi_{x,y} - \psi_{x'',y})_y$;

und hieraus wiederum

7) $\int_{y\div y''}\left(\int_{x\div x''} f_{x,y}\cdot dx\right)\cdot dy = [(\psi_{x,y} - \psi_{x'',y})_y]_{y\div y''}$
$= \psi_{x,y} - \psi_{x'',y} - \psi_{x,y''} + \psi_{x'',y''}$.

Vergleicht man nun (5. und 7.) mit einander, so sieht man die Behauptung des Lehrsatzes erwiesen.

§. 224. Lehrsatz.

Daraus folgt zugleich, daß wenn y' ebenfalls von x, und x' von y unabhängig ist, dann noch seyn müsse

---

*) Diese Bezeichnung spricht für sich, der früheren Annahme zu Folge. Um jedoch auch Anfängern keinen Grund des Anstoßes zu geben, so mag hier noch einmal wiederholt seyn, daß in $(\partial f_x)_y$ die Ableitung von f nach x, welche Ableitung auch eine Funktion von y ist, hier als letztere angesehen werden soll. Das Zeichen $[(\partial f_x)_y]_{y\div y''}$ drückt also die Differenz aus, welche entsteht, wenn man in $(\partial f_x)_y$ auch noch y'' statt y setzt, und letzteres $[(\partial f_x)_y]_{y''}$ von ersterem $(\partial f_x)_y$ oder $[(\partial f_x)_y]_y$ subtrahirt.

VII. $\int_{y'\div y''}\left(\int_{x'\div x''} f_{x,y}\cdot dx\right)\cdot dy = \int_{x'\div x''}\left(\int_{y'\div y''} f_{x,y}\cdot dy\right)\cdot dx.$

Anmerkung 1. Der (VI. und VII.) wegen schreibt man häufig, statt der zweifachen Integrale bloß

$$\int^2 f_{x,y}\cdot dx\cdot dy,$$

und denkt sich bei jeder dieser beiden Integrationen die gehörigen Grenzen noch hinzu, sobald nur letztere von x und y ganz unabhängig sind.

Anmerkung 2. Es ist leicht einzusehen, wie sich diese Sätze der vorstehenden (§§.) auf beliebig viel auf einander folgende Differentiationen und Integrationen ausdehnen lassen, sobald man nur zur Bedingung macht, daß die Werthe, mit denen die Integralien anfangen (oder aufhören) von denjenigen Veränderlichen unabhängig sind, nach denen letztere nachher wiederum integrirt oder differenziirt werden sollen. — In diesem Sinne gilt die allgemeine Formel $\partial^{m,n,p,q\cdots} f_{x,y,z,u\cdots} = \partial^{p,n,q,m\cdots} f_{z,y,u,x\cdots} = \partial^{q,p,m,n\cdots} f_{u,z,x,y\cdots} = \text{&c.}$ des (III. Th. d. S. §§. 28—30.) auch dann noch, wenn beliebige der Wiederholungs-Exponenten m, n, p, q &c. negative ganze Zahlen sind, d. h. Integrationen statt der Differenziationen andeuten, und die Zeichen dann noch dem (III. Th. d. S. §. 26.) analog beibehalten werden.

Anmerkung 3. Man nennt aber die Anwendung dieser Sätze der (§§. 219—224.): das Differenziiren und Integriren unter dem Integralzeichen, so wie noch das Integriren unter dem Differenzialzeichen. —

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir aber nun die früher so oft schon mit großem Erfolge angewandte theilweise Integration gehörig zu verallgemeinern suchen.

Sind nämlich u und v Funktionen von x, so hat man nach der bekannten Formel

$$\int(\varphi\cdot\partial\psi_x)\cdot dx = \varphi\cdot\psi - \int(\psi\cdot\partial\varphi_x)\cdot dx,$$

sogleich

1) $\int(u_x\cdot\partial^3 v_x)\cdot dx = u_x\cdot\partial^2 v_x - \int(\partial^2 v_x\cdot\partial u_x)\cdot dx$

2) $\int(\partial u_x\cdot\partial^2 v_x)\cdot dx = \partial u_x\cdot\partial v_x - \int(\partial v_x\cdot\partial^2 u_x)\cdot dx$

3) $\int(\partial^2 u_x\cdot\partial v_x)\cdot dx = \partial^2 u_x\cdot v_x - \int(v_x\cdot\partial^3 u_x)\cdot dx.$

Addirt man nun diese 3 Gleichungen, nachdem man die 2te mit —1 multiplizirt hat, so erhält man

4) $\int(u_x \cdot \partial^3 v_x) \cdot dx$

$= u_x \cdot \partial^2 v_x - \partial u_x \cdot \partial v_x + \partial^2 u_x \cdot v_x - \int(v_x \cdot \partial^3 u_x) \cdot dx.$

Daraus folgt aber bald der allgemeine

§. 225. Lehrsatz.

Es ist allemal, wenn u und v Funktionen von x sind

I. $\int(u_x \cdot \partial^n v_x) \cdot dx = S[(-1)^a \cdot \partial^a u_x \cdot \partial^b v_x] + (-1)^n \cdot \int(v_x \cdot \partial^n u_x) \cdot dx$ $(a+b = n-1)$

und

II. $\int_{x \div a} (u_x \cdot \partial^n v_x) \cdot dx$

$= S[(-1)^a \cdot \partial^a u_x \cdot \partial^b v_x]_{x \div a} + (-1)^n \int_{x \div a} (v_x \cdot \partial^n u_x) \cdot dx,$ $(a+b = n-1)$

wo in (II.) statt der Grenze x auch noch jede beliebige andere Grenze b gesetzt werden kann.

Beispiel. Ist z. B. $\int a^x \cdot x^m \cdot dx$ zu finden, so kann man x^m statt u, a^x statt $\partial^n v_x$, m statt n setzen (in I.), so daß man hat

$\partial^m v_x = a^x$, also nehmen kann $v_x = \frac{a^x}{(\log a)^m}$,

während $\partial^n u_x = \partial^m u_x = \partial^m (x^m)_x = m!$

und $\int(v_x \cdot \partial^n u_x) \cdot dx = \int \frac{a^x}{(\log a)^m} \cdot m! dx = m! \int \frac{a^x}{(\log a)^{m+1}}$ ist.

Die Formel (I.) gibt dann sogleich

$$\int(a^x \cdot x^m) \cdot dx = S\left[(-1)^a \cdot m^{a|-1} \cdot x^{m-a} \cdot \frac{a^x}{(\log a)^{a+1}}\right] + (-1)^m \cdot m! \frac{a^x}{(\log a)^{m+1}} \quad (a+b = m-1)$$

d. h.

$$\int(a^x \cdot x^m) \cdot dx = S\left[(-1)^a \cdot m^{a|-1} \cdot \frac{x^{m-a} \cdot a^x}{(\log a)^{a+1}}\right]' \quad (a+b = m)$$

weil sich das letzte Glied in der vorhergehenden Zeile an die Glieder des vorhergehenden Aggregats dergestalt anschließt, daß solches mit unter das Aggregat zusammengefaßt werden konnte.

Anmerkung. Mittelst dieser allgemeinen Formel konnten die meisten allgemeinen in Aggregaten ausgedrückten Resultate in den Integraltafeln des (IV. Th. d. S.) unmittelbar und direkt gefunden werden.

§. 226. Zusatz.

Wird in diesen Formeln

$$v_x = \int^n_{x \div \alpha} \psi_x \cdot dx^n$$

genommen, so erhält man mit Zuziehung des (§. 218.)

$$\text{III.} \int_{x \div a} (u_x \cdot \psi_x) \cdot dx = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a u_x \cdot \int^{a+1}_{x \div \alpha} \psi \cdot dx^{a+1}\Big]_{x \div a} \quad (a+b = n-1)$$

$$+ (-1)^n \int_{x \div a} \Big(\partial^n u_x \cdot \int^n_{x \div \alpha} \psi_x \cdot dx^n\Big) \cdot dx.$$

Und für $a = \alpha$, weil dann alle Glieder im Aggregat zur Rechten, sobald a oder α statt x gesetzt wird, verschwinden, gibt dies

$$\text{IV.} \int_{x \div \alpha} (u_x \cdot \psi_x) \cdot dx = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a u_x \cdot \int^{a+1}_{x \div \alpha} \psi_x \cdot dx^{a+1}\Big] \quad (a+b = n-1)$$

$$+ (-1)^n \int_{x \div \alpha} \Big(\partial^n u_x \cdot \int^n_{x \div \alpha} \psi_x \cdot dx^n\Big) \cdot dx.$$

Anmerkung. Es enthalten aber die Formeln (§. 225. I. und II. und §. 226. III. und IV.) beziehlich die (V. VII. IV. VI. VIII. IX. XI.) der (§§. 171—174. d. IV. Th. d. S.) als denjenigen besondern Fall in sich, in welchem $n = 1$ ist.

§. 227. Zusatz.

Differenziirt man die Formel (I. §. 225.) nach x, so erhält man noch

$$\text{V.} \quad u_x \cdot \partial^n v_x = \partial\big(S[(-1)^a \cdot \partial^a u_x \cdot \partial^b v_x]\big)_x + (-1)^n \cdot v_x \cdot \partial^n u_x. \quad (a+b = n-1)$$

§. 228. Zusatz.

Und wendet man diese Formel (V.) zweimal auf $u \cdot \partial^{m,n} v_{x,z}$ an *), indem man letzteres als $\partial^m(\partial^n v_z)_x$ oder als $\partial^n(\partial^m v_x)_z$ ansieht, so erhält man zuletzt jedesmal, unter der Voraussetzung, daß u, wie v, eine Funktion von x und z ist:

---

*) $\partial^{m,n} v_{x,z}$ ist identisch genommen worden mit $\frac{d^{m+n} v}{dx^m \cdot dz^n}$ in der Differenzialrechnung des Leibnitz.

$$\text{VI. } u_{x,z}\cdot\partial^{m,n}v_{x,z} = \partial^{1,1}\Big(S\big[(-1)^{a+c}\cdot\partial^{a,c}u_{x,z}\cdot\partial^{b,d}v_{x,z}\big]\Big)_{x,z} \quad (a+b=m-1,\ c+d=n-1)$$

$$+\partial\Big(S\big[(-1)^{a+n}\cdot\partial^{a,n}u_{x,z}\cdot\partial^{b}v_{x}\big]\Big)_{x} \quad (a+b=m-1)$$

$$+\partial\Big(S\big[(-1)^{m+a}\cdot\partial^{m,a}u_{x,z}\cdot\partial^{b}v_{z}\big]\Big)_{z}+(-1)^{m+n}\cdot v_{x,z}\cdot\partial^{m,n}u_{x,z}\cdot \quad (a+b=n-1)$$

Und wenn man hier links und rechts die doppelten Integrale nimmt, so gelangt man zu einer Formel, durch welche ein doppeltes Integral auf ein anderes doppeltes, und zugleich auf zwei einfache Integrale zurückgeführt wird.

Anmerkung. Von dieser letztern Formel sieht man Gebrauch gemacht in der „Lehre vom Größten und Kleinsten." Berlin 1825. §. 103.).

Höhere Zahlenlehre.

Zehntes Kapitel.

Integration der Gleichungen $\partial^n y_x = \psi_x$, $\partial^{m,n} u_{x,y} = \psi_{x,y}$, &c. Umformung eines solchen nten Integrals. Anwendung dieser Umformung auf die Bestimmung des Ergänzungs-Gliedes der Maclaurin'schen oder der Taylor'schen Reihe.

Erste Abtheilung.

Integration der Gleichungen $\partial^n y_x = \psi_x$, $\partial^{m,n} u_{x,y} = \psi_{x,y}$ &c. Umformung eines solchen nten Integrals.

§. 229. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung

$$\partial^n y_x = \psi_x \quad \text{oder} \quad d^n y = \psi \cdot dx^n;$$

man soll alle Funktionen y_x finden, welche dieser Gleichung entsprechen, während ψ_x eine gegebene Zusammensetzung aus x vorstellt.

A. Auflösungen in Form von unendlichen Reihen.

I. Man nehme für jede gesuchte Funktion y_x eine unendliche nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufende Reihe an, etwa

$$1) \qquad y = S[P_a \cdot (x-\alpha)^a],$$

und suche die unbestimmten Koeffizienten P_a so zu bestimmen, daß

der gegebenen Gleichung $\partial^n y_x = \psi_x$ genügt werde. Aus (1.) folgt aber sogleich durch fortgesetztes Differenziiren

2) $$\partial^n y_x = S[(n+\alpha)^{\alpha|-1} \cdot P_{n+\alpha} \cdot (x-\alpha)^\alpha],$$

und nach dem allgemeinen Maclaurin'schen Lehrsätze hat man noch überdies

3) $$\psi_x = S\left[[\partial^\alpha \psi_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^\alpha}{\alpha!}\right].$$

Die Gleichung $\partial^n y_x = \psi_x$ giebt also, wenn man die Werthe aus (2. und 3.) in sie substituirt:

4) $$S[(n+\alpha)^{\alpha|-1} \cdot P_{n+\alpha} \cdot (x-\alpha)^\alpha] = S\left[[\partial^\alpha \psi_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^\alpha}{\alpha!}\right],$$

woraus sogleich

5) $$P'_{n+\alpha} = \frac{[\partial^\alpha \psi_x]_\alpha}{(n+\alpha)!}$$

hervorgeht, so daß man die unbekannten Koeffizienten P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, ꝛc. ꝛc. gefunden hat, während die vorhergehenden P_0, P_1, P_2, ... P_{n-1} ganz unbestimmt bleiben und eben so viele willkührliche Konstanten sind. Alle gesuchten Werthe von y sind daher ausgedrückt in der Gleichung

I. 1) $$y = S[C_\alpha \cdot (x-\alpha)^\alpha] + S\left[[\partial^\alpha \psi_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^{n+\alpha}}{(n+\alpha)!}\right],$$

wo man für α jeden beliebigen Ziffernwerth, zugleich aber auch statt des erstern Aggregats $S[C_\alpha (x-\alpha)^\alpha]$ auch jede ganze Funktion von x vom n—1ten Grade setzen kann, mit n unbestimmten willkührlich konstanten Koeffizienten. (Vergl. §. 215).

II. Diese Auflösung (I. 1.) enthält das Integral von $\partial y = \psi_x$, wie solches im (VI. Kap. des IV. Th. d. S. §. 163.) entwickelt sich findet, als einen besondern Fall in sich. So wie aber dort (§. 164.) noch die Bernoulli'sche Reihe als ein Integral gefunden worden ist, so kann man auf ähnlichem Wege für den gegenwärtigen Fall, wo $\partial^n y_x = \psi_x$ gegeben ist, finden

II. 1) $$y = S\left[(-1)^c \cdot (n+c-1)_c \cdot \partial^c \psi_x \cdot \frac{x^{n+c}}{(n+c)!}\right],$$

und noch allgemeiner

II. 2) $$y = S\left[(-1)^c \cdot (n+c-1)_c \cdot \partial^c \psi_x \cdot \frac{(x-\alpha)^{n+c}}{(n+c)!}\right],$$

wenn jedesmal die n Glieder mit den n willkührlich konstanten Koeffizienten, welche eine ganze Funktion von x vom n—1ten Grade bilden, noch hinzugedacht werden. (Vgl. §. 215.).

Man erhält aber die Gleichung (II. 2.), wenn man von dem Taylor'schen Satze

$$y_{x+h} = y_x + \partial y_x \cdot h + \partial^2 y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots \text{ oder } y_{x+h} = S\left[\partial^b y_x \cdot \frac{h^b}{b!}\right]$$

ausgeht, $-(x-\alpha)$ statt h setzt, so daß

$$[y_x]_\alpha = y_x - \partial y_x \cdot (x-\alpha) + \partial^2 y_x \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} - \partial^3 y_x \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots$$

$$\text{oder} \quad y_\alpha = S\left[(-1)^b \cdot \partial^b y_x \cdot \frac{(x-\alpha)^b}{b!}\right]$$

hervorgeht, dann hierin statt der beliebigen Funktion y von x, nach und nach ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x \cdots \partial^{n-1} y_x$ substituirt, und aus diesen n Gleichungen die n—1 unbekannten ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x \cdots \partial^{n-1} y$ eliminirt. — Diese Elimination selbst aber geschieht am bequemsten, wenn man die 2te dieser n Gleichungen mit $x-\alpha$, die dritte mit $\frac{(x-\alpha)^2}{2!}$, die 4te mit $\frac{(x-\alpha)^3}{3!}$ u. s. f., die rte mit $\frac{(x-\alpha)^{r-1}}{(r-1)!}$, zuletzt die nte mit $\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}$ multiplizirt, und alle Produkte addirt *).

Für $\alpha = 0$ geht aber dann aus (4.) die (3.) hervor.

---

*) Diese Rechnung mag für den Anfänger hier durchgeführt stehen. Die gedachten n Gleichungen sind alle durch die einzige

$$1.\,1) \quad [\partial^a y_x]_\alpha = S\left[(-1)^b \cdot \partial^{a+b} y_x \cdot \frac{(x-\alpha)^b}{b!}\right]$$

repräsentirt, und gehen alle aus ihr hervor, wenn man in ihr nach und nach 0, 1, 2, 3 ··· n—1 statt α setzt. Multiplizirt man diese (1. 1) nun mit $\frac{(x-\alpha)^a}{a!}$, so hat man den Repräsentanten aller oben bemerkten Produkte; und addirt man zuletzt diese n Produkte, so erhält man

$$2.\,2) \quad S\left[[\partial^a y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} = S\left[(-1)^b \cdot \partial^{a+b} y_x \cdot \frac{(x-\alpha)^{a+b}}{a!\,b!}\right]_{a+b=n-1}.$$

In dieser Gleichung (2. 2.) kann man aber das Aggregat zur Rechten (in welchem $a \leqq n-1$ bleiben muß) in die Differenz zweier andern $A_1 - A_2$ zerlegen, welche dasselbe allgemeine Glied behalten, während

B. Auflösung in endlicher Form, wenn solche möglich ist.

III. Man finde nach und nach, wo möglich in endlicher Form, $\int \psi_x \cdot dx = \psi_{1,x}$, $\int \psi_{1,x} \cdot dx = \psi_{2,x}$, $\int \psi_{2,x} \cdot dx = \psi_{3,x}$, u. s. f., so erhält man

$$\int^r \psi_x \cdot dx = \psi_{r,x} = \partial^{n-r} y;$$

---

in A_1 der durchlaufende Buchstabe α ganz unbeschränkt ist, in A_2 dagegen $\alpha = n+c$ d. h. $\alpha > n-1$ zur Bedingung gemacht wird. So wie aber die Werthe von α ganz unbeschränkt sind, so hat man nach dem binomischen Lehrsatze (§. 402. d. II. Th. d. S.)

$$3.\ 3)\ S\left[\frac{1^a \cdot (-1)^b}{a!\ b!}\right] = \frac{(1-1)^f}{f!}, \text{ also } \left\{\begin{array}{l} = 1, \text{ für } f = 0 \\ = 0, \text{ für } f > 0 \end{array}\right\},$$

und die (2 2) geht daher auf diesem Wege über in

$$4.\ 4)\ S\left[(\partial^a y_x)_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^a}{a!}\right]$$

$$= y_x - S\left[(-1)^b \cdot \frac{(n+c)!}{(n+d)!b!} \cdot \partial^{n+c} y_x \cdot \frac{(x-\alpha)^{n+c}}{(n+c)!}\right]_{b+d=c}.$$

In diesem Aggregat zur Rechten haben aber die Glieder, welche für jeden einzelnen Werth von c hervorgehen, zu Koeffizienten das Aggregat

$$5.\ 5)\ S\left[(-1)^b \frac{(n+c)!}{(n+d)!\,b!}\right]_{b+d=c} = (-1)^c \times S\left[(-1)^d \cdot \frac{(n+c)^{b|-1}}{b!}\right]_{b+d=c}$$

$$= (-1)^c \cdot S\left[\frac{(n+c)^{b|-1}(-1)^{d|-1}}{b!\ \ d!}\right]_{b+d=c} = (-1)^c \cdot \frac{(n+c-1)^{c|-1}}{c!}$$

$$= (-1)^c \cdot (n+c-1)_c,$$

weil $(-1)^{c+d} = (-1)^{b+d+d} = (-1)^b$ und $(-1)^d \cdot d! = (-1)^{d|-1}$ ist, und weil dann sogleich der binomische Lehrsatz für Faktoriellen (§. 410. d. II. Th. d. S.) eintreten kann. Bedenkt man nun noch, daß $\partial^{n+c} y_x = \partial^c \psi_x$ ist, so erhält man aus (4. 4) nun

$$6\ 6)\ y_x = S\left[[\partial^a y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^a}{a!}\right]_{a+b=n-1}$$

$$+ S\left[(-1)^c \cdot (n+c-1)_c \cdot \partial^c \psi_x \cdot \frac{(x-\alpha)^{n+c}}{(n+c)!}\right],$$

wo das erstere Aggregat zur Rechten eine ganze Funktion von x vom (n—1)ten Grade ist, mit völlig willkührlichen Koeffizienten, also auch durch $S[C_a \cdot x^a]_{a+b=n-1}$ ersetzt werden kann.

und zuletzt $\int^n \psi_x \cdot dx^n = \psi_{n,x} = y$,
nehme jedes Integral allgemein, oder nehme für jedes nur ein besonderes, füge dagegen zuletzt noch eine ganze Funktion von x vom n—1ten Grade hinzu, mit den n willkührlichen (konstanten) Koeffizienten, so hat man das Verlangte. (Vgl. §. 215.).

§. 230. Zusatz.

Zerlegt man aber, wie bereits (§. 215.) geschehen ist, das allgemeine nte Integral $\int^n \psi_x \cdot dx^n$ in zwei Theile, wovon der eine die n willkührlichen Konstanten, der andere dagegen das Resultat $\psi_{n,x}$ oder φ_x der nfachen Integration ausdrückt, wenn jedesmal lauter besondere Integrale genommen werden, so kann man letzteren Theil φ_x durch theilweise Integration nach (§§. 225. 226.) in eine Summe von n einfachen Integralen, und letztere wieder in ein einziges einfaches Integral umformen.

Da nämlich

$$\int^{r+1} \psi_x \cdot dx^{r+1} = \int (\int^r \psi_x \cdot dx^r) \cdot dx \text{ ist,}$$

so folgt aus (§. 225.), wenn man r statt n, $\int^r \psi_x \cdot dx^r$ statt u_x, ferner 1 statt $\partial^n v_x = \partial^r v_x$, also $\frac{x^r}{r!}$ statt v_x setzt,

$$(\sigma) \cdots \int^{r+1} \psi_x \cdot dx^{r+1} =$$

$$= S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{a+1}}{(a+1)!} \cdot \int^{r-a} \psi_x \cdot dx^{n-a}\right] + (-)^r \int \frac{x^r}{r!} \cdot \psi_x \cdot dx.$$

Setzt man nun hier nach und nach, 0, 1, 2, 3, ··· n—1 statt r, so erhält man n solche Gleichungen, aus denen man nur noch die n—1 Unbekannten $\int^{n-1} \psi_x \cdot dx^{n-1}$, $\int^{n-2} \psi_x \cdot dx^{n-2}$, $\int^{n-3} \psi_x \cdot dx^{n-3} \cdots \int^2 \psi_x \cdot dx^2$, $\int \psi_x \cdot dx$ eliminiren darf, um zu erhalten *)

---

*) Diese Elimination macht sich wieder (wie man bald sieht, wenn man solches für einzelne kleinere Werthe von n versucht), indem man jede der n Gleichungen, wie solche in (♂) repräsentirt sind, nach den verschiedenen Werthen von r mit $\frac{x^{n-r-1}}{(n-r-1)!}$ multiplizirt, und dann alle

$$(\mathfrak{C})\cdots\begin{cases}\int^n \psi_x \cdot dx^n = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^b}{b!} \int \frac{x^a}{a!} \psi_x \cdot dx\right] \\ \qquad\qquad a+b=n-1 \\ \text{oder } \int^n \psi_x \cdot dx^n = \\ = \frac{1}{(n-1)!} \cdot S\left[(-1)^a \cdot (n-1)_a \cdot x^{n-1-a} \int x^a \cdot \psi_x \cdot dx\right]. \\ \qquad\qquad a+b=n-1\end{cases}$$

§. 231. Zusatz.

Denkt man sich in vorstehendem Resultat ($\mathfrak{C}$) alle n Integrale als allgemeine, jedes mit einer willkührlichen Konstante, so ist der Theil von dem allgemeinen Werth von y_x, welcher die n

---

addirt. — Man erhält dann, indem man d statt r setzt, und die Addition durch ein vorgesetztes Summenzeichen S verrichtet

$$S\left[\frac{x^c}{c!} \cdot \int^{d+1} \psi_x \cdot dx^{d+1}\right] = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{c+a+1}}{c!\,(a+1)!} \int^{d-a} \psi_x \cdot dx^{d-a}\right].$$
$$c+d=n-1 \qquad\qquad a+b=d-1 \qquad\qquad c+d=n-1$$
$$+ S\left[(-1)^d \cdot \frac{x^c}{c!} \int \frac{x^d}{d!} \psi_x \cdot dx\right].$$
$$c+d=n-1$$

Sondert man hier links das Glied $\int^n \psi_x \cdot dx^n$ (nach §. 389. d. II. Th. d. S.) ab, (dadurch, daß man 0 und c+1 statt c setzt); schreibt man in dem ersten Aggregat zur Rechten, weil d−1 nicht negativ werden darf, d+1 statt d; und zerlegt man dann dasselbe Aggregat (nach §. 390. d. II. Th. d. S.) in die Differenz zweier anderen $A_1 - A_2$, welche dieselben allgemeinen Glieder haben, von welchen aber A_1 sich ergibt, wenn man dort a−1 statt a setzt, während A_2 aus A_1 für $a = 0$ hervorgeht, so hebt sich A_2 links und rechts gegenseitig auf, und man erhält

$$\int^n \psi_x \cdot dx^n = -S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{n-1-b}}{c!\;a!} \cdot \int^{b+1} \psi_x \cdot dx^{b+1}\right]$$
$$a+c=n-1-b$$
$$+ S\left[(-1)^d \cdot \frac{x^c}{c!} \int \frac{x^d}{d!} \cdot \psi_x \cdot dx\right],$$
$$c+d=n-1$$

während nach dem binomischen Lehrsatze

$$S\left[\frac{(-1)^a \cdot 1^c}{a!\;c!}\right] = \frac{(1-1)^{n-1-b}}{(n-1-b)!} = 0 \text{ ist,}$$
$$a+c=n-1-b$$

da allemal $b < n-1$ bleiben muß, so daß das obige erstere Aggregat zur Rechten noch wegfällt und das Resultat ($\mathfrak{C}$) gefunden wird.

Konstanten enthält, in dem Resultat (C) bereits mit begriffen, so daß alle Funktionen y_x, welche der Gleichung

$$\partial^n y_x = \psi_x \quad \text{oder} \quad d^n y = \psi \cdot dx^n$$

genügen, in der Formel

$$\text{III. 3)} \quad y_x = \frac{1}{(n-1)!} \cdot S\left[(-1)^a (n-1)_a \cdot x^{n-1-a} \int x^a \cdot \psi_x \cdot dx\right]_{a+b=n-1}$$

enthalten sind.

§. 232. Zusatz.

Nimmt man aber in dem Resultat (§. 230. C) die Integrale alle so, daß sie mit $x = a$ anfangen, so erhält man

$$\text{IV. 4)} \int^n \psi_x \cdot dx^n = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^b}{b!} \int_{x \div a} \frac{x^a}{a!} \cdot \psi_x \cdot dx\right]_{a+b=n-1},$$

welches nach (§. 207.) (besonders Beispiel 7.) in

$$\text{V. 5)} \int^n \psi_x \cdot dx^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x \div a} (x-z)^{n-1} \cdot \psi_z \cdot dz$$

übergeht, d. h. in die Form, welche (§. 230.) vorausgesagt worden war.

Weil aber, wenn $\int (x-z)^{n-1} \cdot \psi_z \cdot dz = \pi_{x,z}$ gesetzt wird, $\int_{z \div a} (x-z)^{n-1} \cdot \psi_z \cdot dz = \pi_{x,z} - \pi_{x,a}$ verschwindet für $z = a$, was auch statt x gesetzt werden mag, so muß auch $\pi_{x,z} - \pi_{x,a}$ verschwinden, wenn für z und für x zugleich a gesetzt wird, also auch wenn zuerst x statt z, und für alles x dann a gesetzt wird. Der Ausdruck in (V. 5) zur Linken verschwindet also für $x = a$, und da nun, man mag die Gleichung (V. 5) hinter einander nach x differenziiren, oder man mag nach und nach in ihr $n-1$, $n-2$, ... 3, 2, 1, statt n setzen, zur Rechten allemal Ausdrücke erscheinen, welche für $z = x = a$, d. h. wenn $z = x$ und für alles x, dann a gesetzt wird, verschwinden; so gibt der Ausdruck zur Rechten in (V. 5) das mit $x = a$ anfangende nte Integral, d. h. das nte Integral, wie solches erhalten wird, wenn man nmal hinter einander integrirt, jedes einzelne dieser Integrale aber mit $x = a$ anfangen läßt.

Man hat also

$$\text{VI. 6)} \int_{x \div a}^n \psi_x \cdot dx^n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_{x \div a} (x-z)^{n-1} \cdot \psi_z \cdot dz,$$

und daraus wieder, wenn man (§. 213.) zuzieht, und danach die Grenzen des Integrals verändert:

VII. 7) $$\int_{x \div a}^{n} \psi_x \cdot dx^n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_{(x-a) \div 0} (x-a-z)^{n-1} \cdot \psi_{a+z} \cdot dz;$$

VIII. 8) $$\int_{x \div a}^{n} \psi_x \cdot dx^n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_{(x-a) \div 0} z^{n-1} \cdot \psi_{x-z} \cdot dz.$$

Und alle diese Resultate liefern zugleich das allgemeine nte Integral, d. h. sie liefern alle die Funktionen y_x, welche der gegebenen Gleichung

$$\partial^n y_x = \psi_x \quad \text{oder} \quad d^n y = \psi \cdot dx^n$$

entsprechen, wenn man noch eine ganze Funktion von x vom n—1ten Grade mit n willkührlichen (konstanten) Koeffizienten addirt.

Anmerkung. In einer Anwendung kann aber eine Funktion y_x nicht bloß durch die Gleichung $\partial^n y_x = \psi_x$, sondern auch noch durch n Nebenbedingungen dergestalt gegeben seyn, daß auch alle n Konstanten in dem allgemeinen Werth für y_x bestimmt werden. Dann existirt nur eine einzige, völlig bestimmte Funktion, welche allen diesen Bedingungen und Erfordernissen zugleich genügt.

§. 233. Aufgabe.

Man soll alle Funktionen $y_{u,v}$ von u und v angeben, welche der Gleichung

1) $$\partial^{1,1} y_{u,v} = \psi_{u,v} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{du \cdot dv} = \psi$$

entsprechen.

Auflösung. Weil $\partial^{1,1} y_{u,v} = \partial(\partial y_u)_v$ ist, so folgt aus (1.) zunächst

2) $$\partial y_u = \int \psi \cdot dv + C,$$

wo C von v unabhängig, übrigens willkührlich, also im allgemeinen als u enthaltend angesehen werden muß. — Aus (2.) folgt aber dann

3) $$y_{u,v} = \int (\int \psi \cdot dv) \cdot du + \int C \cdot du + C_1,$$

wo $\int C \cdot du$ eben so willkührlich, wie C selbst seyn wird, aber

kein v, dagegen wohl u enthalten darf, während C_1 von u unabhängig, übrigens willkührlich, also im allgemeinen als v enthaltend, angesehen und genommen werden muß.

Man hat also für das Gesuchte

4) $y_{u,v} = \int(\int\psi\cdot dv)\cdot du + U + V = \psi_2 + U + V$,

wo $\int\psi\cdot dv = \psi_1$ und $\int\psi_1\cdot du = \psi_2$ bloß besondere Integrale seyn sollen, während U einen willkührlichen Ausdruck, der bloß von u unabhängig ist, aber eben deswegen auch eine willkührliche Funktion von v seyn kann, vorstellt, und wo V gerade so willkührlich aber von v unabhängig (also auch als eine beliebige Funktion von u) gedacht werden muß.

Anmerkung. Weil aber auch $\partial^{1,1}y_{u,v} = \partial(\partial y_v)_u$ ist, so erhält man noch in umgekehrter Ordnung

$$y_{u,v} = \int(\int\psi\cdot du)_v\cdot dv + U' + V' = \psi'' + U' + V',$$

wo $\int\psi\cdot du = \psi'$ und $\int\psi\cdot dv = \psi''$ bloß besondere Integrale seyn sollen, und wo U' einen von u unabhängigen, dagegen V' einen von v unabhängigen, übrigens ganz willkührlichen Ausdruck repräsentirt.

§. 234. Aufgabe.

Man soll alle Funktionen $y_{u,v}$ von u und v finden, welche der Gleichung

1) $\partial^{m,n}y_{u,v} = \psi_{u,v}$ oder $\dfrac{d^{m+n}y}{du^m\cdot dv^n} = \psi$

entsprechen.

Auflösung. Man hat zunächst, weil

$$\partial^{m,n}y_{u,v} = \partial^m(\partial^n y_v)_u = \partial^n(\partial^m y_u)_v \text{ ist,}$$

nach (§. 233.)

2) $\partial^n y_v = \int^m\psi\cdot du^m + S[C_a\cdot u^a]_{a+b=m-1}$,

wo C_a, d. h. C_0, C_1, C_2, ... C_{m-1} m von u unabhängige übrigens ganz willkührliche Ausdrücke vorstellen, während für die m Integrale lauter beliebige besondere Integrale gedacht sind. — Dann aber folgt aus (2.) wieder

3) $y_{u,v} = \int^n (\int^m \psi \cdot du^m) \cdot dv^n + S[U_a \cdot u^a]^{*}) + S[V_a \cdot v^a]$, $a+b=m-1$, $a+b=n-1$

wo U_a m von u unabhängige, übrigens beliebige Ausdrücke repräsentirt, die namentlich ganz willkührliche Funktionen von v seyn können, und wo V_a eben so n von v unabhängige, übrigens willkührliche Ausdrücke vorstellt, welche wiederum auch als ganz willkührliche Funktionen von u angesehen werden müssen.

Anmerkung. Da man übrigens, in umgekehrter Ordnung verfahrend, ähnliches und jedesmal alle solche Funktionen $y_{u,v}$ erhält, so kann man bloß schreiben

$$y_{u,v} = \int^{m+n} \psi \cdot du^m \cdot dv^n + S[U_a \cdot u^a] + S[V_a \cdot v^a],$$ $a+b=m-1$, $a+b=n-1$

und für den Fall des (§. 233), wo $m = n = 1$ ist, bloß

$$y_{u,v} = \int^2 \psi \cdot du \cdot dv + U + V,$$

und die Ordnung des Integrirens der freien Wahl des Rechners überlassen.

§. 235. Zusatz.

Auf dieselbe Art findet man alle Werthe, welche der Gleichung

1) $\partial^{l,m,n} y_{u,v,w} = \psi_{u,v,w}$ oder $\frac{d^{l+m+n} y}{du^l \cdot dv^m \cdot dw^n} = \psi$

genügen, ausgesprochen in der Gleichung

2) $y_{u,v,w} =$

$$\int^{l+m+n} \psi \cdot du^l \cdot dv^m \cdot dw^n + S[U_a \cdot u^a] + S[V_a \cdot v^a] + S[W_a \cdot w^a],$$ $a+b=l-1$, $a+b=m-1$, $a+b=n-1$

wo die Integrale lauter besondere seyn sollen, wo jedoch U_a, V_a, W_a, ganz willkührliche Ausdrücke vorstellen, welche aber beziehlich von u, v, w unabhängig sind, so daß sie im Allgemeinen als ganz willkührliche Funktionen der beiden übrigen Veränderlichen angesehen werden können und müssen.

Und man sieht, wie ein ähnliches Verfahren für noch mehr zusammengesetzte, hiehergehörige Fälle statt finden wird.

---

*) Da nämlich in (2.) die Koeffizienten C_a nicht u, wohl aber v enthalten können, so erhält man, wenn $C_a \cdot u^a$ integrirt wird (n mal nach v) offenbar $u^a \cdot \int^n C_a \cdot dv^n$, während $\int^n C_a \cdot dv^n$ eben so willkührliche Funktionen von v sind, als C_a selbst deren waren, also durch U_a vorgestellt seyn können, sobald man nur U_a von u unabhängig sich denkt.

Beispiel. Es sey gegeben die Gleichung

$$\partial^{1,1,1} y_{u,v,w} = uv^2w^3,$$

so hat man, wenn man immer bloß besondere Integrale nimmt,

$$\partial^{1,1} y_{u,v} = \int (uv^2w^3) \cdot dw = \tfrac{1}{4} uv^2w^4,$$

$$\partial y_u = \int (\tfrac{1}{4} uv^2w^4) \cdot dv = \tfrac{1}{12} uv^3w^4,$$

und dann

$$y_{u,v,w} = \int (\tfrac{1}{12} uv^3w^4) \cdot du = \tfrac{1}{24} u^2v^3w^4 + U_{v,w} + V_{u,w} + W_{u,v}.$$

In der That findet man umgekehrt aus diesem $y_{u,v,w}$ wieder:

$$\partial y_w = \tfrac{1}{6} u^2v^3w^3 + \partial U_w + \partial V_w,$$

$$\partial^{1,1} y_{v,w} = \tfrac{1}{2} u^2v^2w^3 + \partial^{1,1} U_{v,w}$$

endlich $\partial^{1,1,1} y_{u,v,w} = uv^2w^3$.

Zweite Abtheilung.

Wichtige Anwendung der eben behandelten Lehren zur Bestimmung des Ergänzungsgliedes der Taylor'schen oder der Maclaurin'schen Reihe, wenn man solche bei irgend einem nten Gliede abbrechen läßt. Bestimmung der Grenzen, zwischen denen dieses Ergänzungsglied in gegebenen Fällen liegen muß.

---

§. 236. Aufgabe.

Man soll statt der (unendlichen) allgemeinern Maclaurin'schen Reihe des (§. 14. d. III. Th. d. S.), nämlich statt

$$1) \quad y_x = S\left[\left[\partial^a y_x\right]_a \cdot \frac{(x-a)^a}{a!}\right]$$

eine endliche Reihe für y_x angeben, welche mit den n ersten Gliedern der Reihe (1.) beginnt, dann aber ein Ergänzungsglied E_x hat, welches statt der Summe aller übrigen unendlich vielen Glieder gesetzt werden kann.

Auflösung. Man soll also E_x so finden, daß

$$2)\quad y_x = [y_x]_a + [\partial y_x]_a \cdot \frac{x-a}{1} + [\partial^2 y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$$
$$+ [\partial^{n-1} y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + E_x$$

ist. Differenziirt man aber diese Gleichung n mal hinter einander nach x, so erhält man

$$3)\quad \partial y_x = [\partial y_x]_a + [\partial^2 y_x]_a \cdot \frac{x-a}{1} + \cdots$$
$$+ [\partial^{n-1} y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} + \partial E_x,$$

$$4)\quad \partial^2 y_x = [\partial^2 y_x]_a + \cdots + [\partial^{n-1} y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^{n-3}}{(n-3)!} + \partial^2 E_x$$

u. s. f. zuletzt

$$5)\quad \partial^{n-1} y_x = [\partial^{n-1} y_x]_a + \partial^{n-1} E_x$$

und $$6)\quad \partial^n y_x = \partial^n E_x,$$

so daß

$$7)\quad E_x = \int^n (\partial^n y_x) \cdot dx^n$$

seyn wird, wenn nur in dem allgemeinen nten Integral zur Rechten, die n willkührlichen Konstanten so genommen werden, daß das durch dasselbe ausgedrückte Ergänzungsglied E_x, auch allen n Gleichungen (2.—5.) genügt.

Setzt man aber in diesen n Gleichungen (2.—5.) a statt x, so gehen sie über in

$$[E_x]_a = 0,\ [\partial E_x]_a = 0,\ [\partial^2 E_x]_a = 0,\ \cdots\ [\partial^{n-1} E_x]_a = 0;$$

also hat man offenbar

$$8)\quad E_x = \int_{x \div a}^{n} (\partial^n y_x) \cdot dx^n,$$

mithin auch nach (§. 232. Nr. VI. 6.)

$$9)\quad E_x = \int_{x \div a} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \partial^n y_z \cdot dz$$
$$= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_{x \div a} (x-z)^{n-1} \cdot \partial^n y_z \cdot dz.$$

Und man erhält sonach den so höchst wichtigen Satz

$$I.\quad y_x = S\left[[\partial^a y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x \div a} (x-z)^{n-1} \cdot \partial^n y_z \cdot dz,$$

wo statt a entweder 0 oder jeder andere beliebige Ziffernwerth gesetzt werden kann, und wo n jede beliebige ganze Zahl vorstellt,

so daß die Formel (I.) für $n = 1, 2, 3, 4 \cdots$ noch folgende spezielle Formeln in sich schließt

$\alpha)\ y_x = [y_x]_a + \int_{x \div a} \partial y_z \cdot dz$

$\beta)\ y_x = [y_x]_a + [\partial y_x]_a \cdot (x-a) + \int_{x \div a} (x-z) \cdot \partial^2 y_z \cdot dz$

$\gamma)\ y_x = [y_x]_a + [\partial y_x]_a \cdot (x-a) + [\partial^2 y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} +$

$$+ \frac{1}{2!} \cdot \int_{x \div a} (x-z)^2 \cdot \partial^3 y_z \cdot dz$$

$\delta)\ y_x = [y_x]_a + [\partial y_x]_a \cdot (x-a) + [\partial^2 y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} +$

$$+ [\partial^3 y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \frac{1}{3!} \cdot \int_{x \div a} (x-z)^3 \cdot \partial^4 y_z \cdot dz$$

u. s. w. f.

§. 237. Zusatz.

Setzt man in dieser Formel (I.) $x+h$ statt x, und dann durchgehends x statt a, so erhält man

$$\text{II.}\quad y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{(x+h) \div x} (x+h-z)^{n-1} \cdot \partial^n y_z \cdot dz$$

oder

$$\text{III.}\quad y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{h \div 0} (h-z)^{n-1} \cdot [\partial^n y_z]_{x+z} \cdot dz$$

oder

$$\text{IV.}\quad y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{h \div 0} z^{n-1} \cdot [\partial^n y_z]_{x+h-z} \cdot dz,$$

je nachdem das Ergänzungsglied nach den Formeln des (§. 213.) bald die eine Form, bald die andere angenommen hat.

Dies ist aber der Satz, welcher in den ersten n Gliedern mit dem Taylor'schen Satze zusammenfällt, während die Summe

aller unendlich vielen übrigen Glieder der Taylor'schen Reihe durch ein bestimmtes Integral vorgestellt ist.

Anmerkung. Der Anfänger, welcher sich in unsre Ansicht, und namentlich in die beiden ersten Theile dieses Systems, gehörig hineingedacht hat, wird hier namentlich nicht unterlassen, noch einmal sich recht lebendig vorzustellen:

1) Daß die gesammte niedere und höhere Analysis es nie mit Größen, sondern immer nur mit dem Verhalten der 7 Operationen zu einander zu thun hat;

2) daß daher jede Gleichung eine so genannte identische seyn muß, weil diese die einzig definirten Gleichungen sind, mithin andere Gleichungen als identische, dem Wesen nach nicht existiren;

3) daß also auch die hiesigen Gleichungen (I.—IV.) keine andere als identische seyn können, welches hier von der (I.) noch speziell nachgewiesen seyn mag.

Nimmt man nämlich das Ergänzungsglied in (I.), d. h.

$$\int_{x\div a} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \partial^n y_z \cdot dz,$$

und integrirt man hinter einander theilweise, so daß die bereits (§. 225.) entwickelte allgemeinere Formel

$$\int_{x\div a}(u_z \cdot \partial^n v_z)\cdot dz = S[(-1)^a \cdot \partial^a u_z \cdot \partial^b v_z]_{x\div a}^{a+b=n-1} + (-1)^n \int_{x\div a}(v_z \cdot \partial^n u_z)\cdot dz$$

angewandt wird, indem man in letzterer y_z statt v und $\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}$ statt u setzt, so hat man, $\left(\text{weil dann } \partial^a u_z = \partial^a\left(\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\right)_z\right.$

$$= \frac{(n-1)^{a|-1} \cdot (x-z)^{n-1-a}}{(n-1)!} \cdot (-1)^a = (-1)^a \cdot \frac{(x-z)^{n-1-a}}{b!},$$

weil ferner $\partial^n\left((x-z)^{n-1}\right)_z = 0$, also auch

$$\left.\int_{x\div a}(v_z \cdot \partial^n u_z)\cdot dz = \int_{x\div a} y_z \cdot \partial^n\left(\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\right)_z \cdot dz = 0 \text{ ist}\right)$$

das gedachte Ergänzungsglied

$$\int_{x\div a} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \partial^n y_z \cdot dz = S\left[\partial^b y_z \cdot \frac{(x-z)^b}{b!}\right]_{x\div a}^{a+b=n-1} =$$

$$= S\left[[\partial^b y_z]_x \cdot \frac{(x-x)^b}{b!}\right]_{a+b=n-1} - S\left[[\partial^b y_z]_a \cdot \frac{(x-a)^b}{b!}\right]_{a+b=n-1},$$

während das erstere Aggregat für alle Werthe von $b>0$ lauter Glieder $=0$ gibt, dagegen für $b=0$ das Glied $[\partial^0 y_z]_x$ d. h. $[y_z]_x$ d. h. y_x liefert, so daß man für das gedachte Ergänzungsglied

$$\int_{x\div a} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \partial^n y_z \cdot dz = y_x - S\left[(\partial^b y_z)_a \cdot \frac{(x-a)^b}{b!}\right]_{a+b=n-1}$$

findet. Substituirt man aber dieses so umgeformte Ergänzungsglied in die Formel (I. des §. 236.), so wird solche, unserer Behauptung gemäß, eine identische.

4) Derselbe Leser wird sich ferner erinnern, daß das ganze Ziffernrechnen, so wie es für den bürgerlichen Gebrauch getrieben wird, nichts anders als die Kunst ist, einen Ausdruck, durch welchen eine bestimmte Zahl ausgedrückt ist, umzuformen, und daß gerade auf eine neue Form (für dieselbe Sache) auch neue Gesetze der Umformung angewandt, und so die gewöhnlichen Zwecke der Vergleichung der Größen gerade deshalb erreicht werden können.

5) Wenn daher auch die hiesigen Gleichungen (I.—IV. der §§. 236. 237.), wie alle, bloß identische Gleichungen sind, so ist gerade diese in (I.—IV.) sichtbare Form der Ergänzungsglieder höchst geeignet, neue wichtige Folgerungen zu ziehen. Namentlich kann man für gegebene Ziffernwerthe, weil der Ausdruck unter dem Integralzeichen, nämlich

$$\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-)!} \cdot \partial^n y_z$$

ein Produkt ist, Grenzen ziehen, zwischen denen der Ziffernwerth dieses Ergänzungsgliedes liegen muß, wenn man vorher folgenden Lehrsatz entwickelt.

§. 238. Lehrsatz und Beweis.

Sind in dem Produkte $U_z \cdot V_z$, U und V solche Funktionen von z, welche für keinen der Werthe von z, der zwischen a und b liegt, die Form $\frac{1}{0}$ oder irgend eine andere im Kalkul unzulässige Form (also auch nicht die Form *log* 0) annehmen, und ist ferner U_k der kleinste, aber U_g der größeste der Werthe von U_z zwischen den Grenzen $z = a$ und $z = b$, so ist allemal

$$\int_{b \div a} U_z \cdot V_z \cdot dz < U_g \cdot \int_{b \div a} V_z \cdot dz$$

$$\text{aber} \quad > U_k \cdot \int_{b \div a} V_z \cdot dz,$$

so lange nur V_z zwischen $z = a$ und $z = b$ immerfort positiv bleibt.

Denn die Reihe der Glieder

$$U_a \cdot V_a \cdot h + U_{a+h} \cdot V_{a+h} \cdot h + U_{a+2h} \cdot V_{a+2h} \cdot h + \cdots + U_{b-h} \cdot V_{b-h} \cdot h$$

liegt allemal, so lange V_a, V_{a+h}, V_{a+2h} ··· V_{b-h} positiv bleiben, zwischen den beiden Werthen, welche sie annimmt, wenn einmal statt der ungleichen (oder gleichen) Faktoren U_a, U_{a+h}, U_{a+2h} ···· U_{b-h} durchweg der kleinste U_k oder durchweg der größte U_g gesetzt wird, — und es folgt also der Lehrsatz unmittelbar aus (§. 161. d. IV. Th. d. S.), nach welchem ein Integral als eine Summe von unendlich vielen solchen Gliedern, in denen h unendlich klein ist, angesehen werden kann.

Ist aber V_z für alle Werthe von z zwischen a und b immerfort negativ, so ist grade umgekehrt

$$\int_{b \div a} U_z \cdot V_z \cdot dz > U_g \cdot \int_{b \div a} V_z \cdot dz$$

$$\text{aber} \quad < U_k \cdot \int_{b \div a} V_z \cdot dz.$$

(Vgl. §§. 112.—116. des I. Th. d. S.).

§. 239. Zusatz.

Wendet man diesen Satz auf das Ergänzungsglied in der Formel (I. des §. 236.) an, so findet man (wenn $U = \partial^n y_z$, $V = \frac{(x-z)^{n-i}}{(n-1)!}$ gesetzt wird, so daß man hat

$$\int_{x\div a} V \cdot dz = \int_{x\div a} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot dz = \left(- \frac{(x-z)^n}{n!} \right)_{x\div a}$$

$$= \frac{(x-a)^n}{n!}\Big),$$

jenes Ergänzungsglied, wenn nur $a < x$ gedacht wird *),

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{x\div a} (x-z)^{n-1} \cdot \partial^n y_z \cdot dz < \frac{(x-a)^n}{n!} [\partial^n y_z]_g$$

$$\text{aber} > \frac{(x-a)^n}{n!} [\partial^n y_z]_k,$$

wo $[\partial^n y_z]_g$ der größeste, $[\partial^n y_z]_k$ dagegen der kleinste Werth von $\partial^n y_x$ ist unter allen Werthen, welche dieses $\partial^n y_x$ erhält, wenn nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe von a bis x, statt x gesetzt werden.

Dasselbe Ergänzungsglied der Maclaurin'schen Reihe

$$\frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_{x\div a} (x-z)^{n-1} \cdot \partial^n y_z \cdot dz$$

kann daher auch

$$= \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot [\partial^n y_x]_{a+\theta(x-a)} \text{ **)}$$

gesetzt werden, wo θ ein unbekannter, aber zwischen 0 und 1 liegender Werth ist.

---

*) Da nämlich $a < x$ vorausgesetzt wird, so bleibt $V_z = \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}$ für alle Werthe von z zwischen a und x allemal positiv, wie solches (§. 238) verlangt wird.

**) Da man nämlich in diesen Untersuchungen voraussetzen darf, daß die Werthe von $\partial^n y_x$ für die zwischen a und x stetig neben einander liegenden Werthe von x, d h. für alle Werthe $a+\theta(x-a)$, die für die von 0 bis 1 stetig wachsenden Werthe von θ sich ergeben, stetig sich ändern, so muß nothwendig einer dieser Werthe von $[\partial^n y_x]_{a+\theta(x-a)}$ (unter allen denen, welche darin stecken für die zwischen 0 und 1 stetig wachsenden Werthe von θ) existiren, welcher dem zu $\frac{(x-a)^n}{n!}$ gehörigen Faktor des Ergänzungsgliedes genau gleich ist.

Wendet man dagegen denselben Satz auf die Ergänzungsglieder der Formeln (II.—IV. des §. 237.) an, so erhält man

$$\int_{(x+h)\div x} \frac{(x+h-z)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \partial^n y_z \cdot dz < \frac{h^n}{n!} \cdot [\partial^n y_x]_g$$

$$\text{aber} > \frac{h^n}{n!} \cdot [\partial^n y_x]_k,$$

wo $[\partial^n y_x]_g$ der größeste, $[\partial^n y_x]_k$ dagegen der kleinste unter allen Werthen sind, welche $\partial^n y_x$ annimmt, wenn nach und nach alle Werthe, von x bis x+h, statt x gesetzt werden.

Dieses Ergänzungsglied der Taylor'schen Reihe,

$$\frac{1}{(n-1)!} \int (x+h-z)^{n-1} \cdot \partial^n y_z \cdot dz,$$

kann daher auch

$$= \frac{h^n}{n!} \cdot [\partial^n y_x]_{x+\theta h}$$

gesetzt werden, wo θ ein noch unbekannter, aber zwischen 0 und 1 liegender Werth ist.

§. 240.

Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Satz in Form von endlichen Reihen.

Für die praktischen Ziffernberechnungen so wie für gewisse Beweise, welche sich auf solche gründen, fasse man also statt der unendlichen Reihen des Taylor'schen und Maclaurin'schen Satzes, lieber folgende Resultate in endlicher Form auf, nämlich:

$$\text{I.} \quad y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + [\partial^n y_x]_{x+\theta h} \cdot \frac{h^n}{n!};$$

$$\text{II.} \quad y_x = S\left[[\partial^a y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + [\partial^n y_x]_{a+\theta\cdot(x-a)} \cdot \frac{(x-a)^n}{n!};$$

und für $a = 0$

$$\text{III.} \quad y_x = S\left[[\partial^a y_x]_0 \cdot \frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + [\partial^n y_x]_{\theta x} \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Jede dieser Reihen besteht aus n Gliedern nebst einem Ergänzungsgliede, in welchem θ zwar unbestimmt bleibt, und sogar im Allgemeinen mit n zugleich immer andere Werthe vorzustellen hat, jedoch stets und unbedingt zwischen den Grenzen 0 und 1 liegen muß.

Da aber in diesen Gleichungen statt n nach und nach 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. gesetzt werden kann, so enthalten diese Formeln (I. II. III.) noch folgende spezielle:

$\alpha)\ y_{x+h} = y_x + [\partial y_x]_{x+\theta h} \cdot h;$

$\beta)\ y_{x+h} = y_x + \partial y_x \cdot h + [\partial^2 y_x]_{x+\theta h} \cdot \frac{h^2}{2!};$

$\gamma)\ y_{x+h} = y_x + \partial y_x \cdot h + \partial^2 y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + [\partial^3 y_x]_{x+\theta h} \cdot \frac{h^3}{3!};$

u. s. w. f.

$\alpha')\ y_x = [y_x]_a + [\partial y_x]_{a+\theta(x-a)} \cdot (x-a);$

$\beta')\ y_x = [y_x]_a + [\partial y_x]_a \cdot (x-a) + [\partial^2 y_x]_{a+\theta(x-a)} \cdot \frac{(x-a)^2}{2!};$

u. s. w. f.

$\alpha'')\ y_x = [y_x]_0 + [\partial y_x]_{\theta x} \cdot x;$

$\beta'')\ y_x = [y_x]_0 + [\partial y_x]_0 \cdot x + [\partial^2 y_x]_{\theta x} \cdot \frac{x^2}{2!};$

$\beta''')\ y_x = [y_x]_0 + [\partial y_x]_0 \cdot x + [\partial^2 y_x]_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + [\partial^3 y_x]_{\theta x} \cdot \frac{x^3}{3!};$

u. s. w. f.

Bedenkt man überdies, daß die n ersten Glieder der Maclaurin'schen Reihe nach (§. 208.) (besonders Beisp. 2.) durch eine einzige (n—1)te Ableitung symbolisch vorgestellt sind, und daß sich auf demselben Wege auch die ersten n Glieder der Taylor'schen Reihe vereinigen lassen, so hat man noch weiter, aus (I.—III.):

$$\text{IV. } y_{x+h} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\partial^{n-1}\left(\frac{h^n \cdot y_z}{x+h-z}\right)_z\right]_x + [\partial^n y_x]_{x+\theta h} \cdot \frac{h^n}{n!}$$

$$\text{V.}\quad y_x = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\left[\partial^{n-1}\left(\frac{(x-a)^n\cdot y_z}{x-z}\right)_z\right]_a + \left[\partial^n y_x\right]_{a+\theta(x-a)}\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$\text{VI.}\quad y_x = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\left[\partial^{n-1}\left(\frac{x^n\cdot y_z}{x-z}\right)\right]_0 + \left[\partial^n y_x\right]_{\theta x}\cdot\frac{x^n}{n!},$$

welche 3 Gleichungen zur Rechten in ihren ersten Theilen die n ersten Glieder der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe symbolisch darstellen, während die 2ten Theile der rechten Seite den (§§. 236—239.) zu Folge, eigentlich und genau genommen, einfache bestimmte Integrale sind, welche die Summe aller übrigen Glieder der genannten unendlichen Reihen ausdrücken.

Anmerkung. In besondern Fällen kann man auch noch suchen, die Grenzen, zwischen denen das Ergänzungsglied der Taylor'schen oder Maclaurin'schen Reihe liegt, zu verengern, welches besonders dann geschehen muß, wenn für die besondern Ziffernwerthe, von denen gerade die Rede ist, die hier angegebenen Grenzen bedeutend von einander abliegen sollten.

Ja auch im Allgemeinen kann man andere Grenzen bekommen, zwischen denen die gedachten Ergänzungsglieder liegen müssen, wenn man ähnliche Wege, wie früher, betritt, sich aber umgeformter Ausdrücke bedient. Um dies noch besonders zu zeigen, setze man wie in der Auflösung des (236.) direkt

$$1)\quad y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x\cdot\frac{h^a}{a!}\right] + E_{x,h},$$

hierin aber, x+z statt x, so wie h—z statt h, so daß das Ergänzungsglied $E_{x,h}$ in eine Funktion von z übergeht, und nun durch F_z bezeichnet seyn mag, dergestalt daß F_z für z=0 wiederum in $E_{x,h}$ übergeht, also daß man hat

$$2)\quad E_{x,h} = [F_z]_0.$$

Man hat dann zugleich aus (1.)

$$3)\quad y_{x+h} = S\left[\left[\partial^a y_x\right]_{x+z}\cdot\frac{(h-z)^a}{a!}\right] + F_z.$$

Differenziirt man nun diese Gleichung nach z, so erhält man, weil sich die Glieder des Resultats meist aufheben,

$$4)\ \partial F_z = -\frac{(h-z)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot[\partial^n y_x]_{x+z}.$$

Nun ist aber nach (§. 240. α''.)

$$5)\ F_h = [F_z]_0 + [\partial F_z]_{\theta h}\cdot h,$$

während aus (3.)

$$6)\ F_h = 0$$

hervorgeht. Setzt man daher in (4.) θh statt z, und eliminirt man mittelst (5. und 6.) $[\partial F_z]_{\theta h}$, so erhält man das gesuchte Ergänzungsglied

$$7)\ E_{x,h} = h\cdot\frac{(h-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot[\partial^n y_x]_{x+\theta h}.$$

Also hat man nun außer (I. II. III. des §. 240.) noch:

$$\text{I. } y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x\cdot\frac{h^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + h\cdot\frac{(h-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot[\partial^n y_x]_{x+\theta h}.$$

Setzt man aber hier a statt x, und x—a statt h, so erhält man

$$\text{II. } y_x = S\left[[\partial^a y_x]_a\cdot\frac{(x-a)^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + (x-a)\cdot\frac{((1-\theta)(x-a))^{n-1}}{(n-1)!}\cdot[\partial^n y_x]_{a+\theta(x-a)};$$

und hieraus für $a=0$

$$\text{III. } y_x = S\left[[\partial^a y_x]_0\cdot\frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + x\cdot\frac{(x-\theta x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot[\partial^n y_x]_{\theta x},$$

wo allemal θ zwischen 0 und 1 liegt, wenn es auch für jeden andern Werth von n selbst immer verschieden seyn kann.

Dieses Verfahren mag aber ungefähr den Geist bezeichnen, in welchem solche Versuche angestellt werden müssen.

Beispiel. Ist z. B. $y_x = x^\mu$, so hat man nach (§. 240. I.)

$$y_{x+h} = (x+h)^\mu = x^\mu + \mu \cdot x^{\mu-1} \cdot h + \mu_2 \cdot x^{\mu-2} \cdot h^2 + \cdots$$
$$+ \mu_{n-1} \cdot x^{\mu-n+1} \cdot h^{n-1} + \mu_n \cdot (x+\theta h)^{\mu-n} \cdot h^n,$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt, übrigens unbekannt ist, wo also dieses letzte Glied bloß sagt, daß solches zwischen dem größten und kleinsten der Werthe desselben liege, welche es annimmt, wenn nach und nach alle zwischen 0 und 1 stetig neben einander liegenden Werthe statt θ gesetzt werden. — Nach der Formel (I. der Anmerkg.) dagegen hat man

$$y_{x+h} = (x+h)^\mu = x^\mu + \mu x^{\mu-1} \cdot h + \cdots + \mu_{n-1} \cdot x^{\mu-n+1} \cdot h^{n-1}$$
$$+ n \cdot \mu_n \cdot (x+\theta h)^{\mu-n} \cdot (1-\theta)^{n-1} \cdot h^n,$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt, übrigens unbekannt ist, wo also dieses letzte Glied bloß anzeigt, daß es zwischen dem größten und dem kleinsten der Werthe desselben liege, welche es annimmt, wenn in ihm statt θ alle zwischen 0 und 1 stetig neben einander liegenden Werthe gesetzt werden.

In den Exercises von Cauchy (1826) findet man noch ein hieher gehöriges Beispiel.

§. 241. Zusatz.

Ist u eine Funktion zweier Veränderlichen x und y, so hat man erstlich, in Betracht, daß dann u auch eine bloße Funktion von x ist, nach (§. 236. I.)

$$1)\ u_{x,y} = S\left[\left[\partial^a u_x\right]_a \cdot \frac{(x-a)^a}{a!}\right]_{a+c=n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_{x \div a} (x-z)^{n-1} \cdot \left[\partial^n u_x\right]_z \cdot dz,$$

wo $\left[\partial^a u_x\right]_a$, $\left[\partial^n u_x\right]_z$ noch Funktionen von y sind. Entwickelt man daher jede der letztern nach derselben (I. §. 236.) wiederum in Reihen (mit ihren Ergänzungsgliedern), welche nach Potenzen von y—b fortlaufen; so erhält man

$$2)\quad u_{x,y} = S\Big[\big[\partial^{a,b} u_{x,y}\big]_{a,b} \cdot \frac{(x-a)^a \cdot (y-b)^b}{a!\ b!}\Big]_{a+c=n-1,\ b+d=m-1} +$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!} \cdot \int_{y\div b} (y-v)^{m-1} \cdot S\Big[\big[\partial^{a,m} u_{x,y}\big]_{a,v}\Big]_{a+c=n-1} \cdot dv +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_{x\div a} (x-z)^{n-1} \cdot S\Big[\big[\partial^{n,b} u_{x,y}\big]_{z,b}\Big]_{b+d=m-1} \cdot dz +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \cdot \int_{x\div a, y\div b}^{2} (x-z)^{n-1} (y-v)^{m-1} \big[\partial^{n,m} u_{x,y}\big]_{z,v} dz \cdot dv,$$

wenn im Allgemeinen unter $[V_{x,y}]_{r,s}$ das verstanden wird, was aus $V_{x,y}$ hervorgeht, wenn man r statt x und s statt y schreibt, und wenn $\int^{2}_{x\div a, y\div b} U_{z,v} \cdot dz \cdot dv$ das bedeutet, was man erhält, wenn $U_{z,v}$ einmal nach v zwischen den Grenzen b und y, und dann nach z zwischen den Grenzen a und x (oder auch in umgekehrter Ordnung) integrirt wird.

Mittelst dieser Formel (2.) kann man aber den Taylor'schen und den Maclaurin'schen Lehrsatz für Funktionen zweier Veränderlichen, wenn man die Doppelreihe jedesmal nach jeder Richtung beliebig abbrechen läßt, ebenfalls in Form von endlichen Reihen mit den Ergänzungsgliedern herstellen; was jedoch hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Höhere Zahlenlehre.

Eilftes Kapitel.

Ganz allgemeine Methode zur Entwicklung in Reihen, zugleich mit der jedesmaligen Bestimmung des Ergänzungsgliedes.

Erste Abtheilung.

Von der Entwicklung der Polynomial-Funktionen in Reihen.

Vorerinnerung.

So wie es bisher oft von Nutzen gewesen ist, eine Funktion V_x nach Potenzen von x in eine unendliche Reihe zu verwandeln, so kann es nöthig werden V_{a+bx} oder gar $V_{a+bx+cx^2}$, oder gar $V_{a+bx+cx^2+ex^3}$, u. s. f. und allgemein V_z, wo z die unendliche Reihe

$$a+bx+cx^2+ex^3+gx^4+ \ldots \text{ in inf.}$$

vorstellt, in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe umzuformen.

Aber eben so kann als praktisch wichtig erscheinen die Entwicklung einer Funktion $V_{y,z,u\ldots}$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe, wenn y, z, u ꝛc selber solche nach x fortlaufende (endliche oder) unendliche Reihen sind *).

*) Jede endliche Reihe kann immer als eine unendliche, mit unendlich vielen Nullkoeffizienten versehene Reihe angesehen werden.

In beiden Fällen kann die Funktion V entwickelt oder verwickelt (durch eine Gleichung) gegeben seyn.

Wenn aber alle die Reihen, aus denen eine Funktion V zusammengesetzt ist, nach einem und demselben x fortlaufen, so ist V in jedem Falle eine mittelbare Funktion von x, und es wird daher V augenblicklich nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt seyn, so daß man hat, nach (III. Th. d. S. §. 13.):

$$V = S\left[\left[\partial^a V_{(x)}\right]_0 \cdot \frac{x^a}{a!}\right]$$

oder

$$V = S\left[\delta^a V \cdot \frac{x^a}{a!}\right],$$

wenn $\delta^a V$ das vorstellt, was aus $\partial^a V_{(x)}$ wird, so oft man 0 statt x setzt.

Es ist daher der Gegenstand dieser ersten Abtheilung des gegenwärtigen Kapitels durch die vorstehende Gleichung schon erschöpft, und es würde demnach nichts weiter mehr hinzuzufügen seyn, wenn wir nicht die Absicht hätten, das Technische und Praktische des Verfahrens hier noch in ein näheres Licht zu stellen. Dieses letztere soll also hier vorzüglich unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen.

---

§. 242. Erklärung der Bezeichnung.

Da jede unendliche, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe, in welche eine Funktion V_x von x verwandelt werden kann, nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze (III. Th. d. S. §. 13.) die Form annimmt

$$\delta^0 V + \delta^1 V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \delta^4 V \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

wenn $\delta^0 V$, $\delta^1 V$, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, $\delta^4 V$, &c.

das bedeuten, was beziehlich aus

$$V_x,\ \partial V_x,\ \partial^2 V_x,\ \partial^3 V_x,\ \partial^4 V_x,\ \text{&c.}$$

wird, wenn man in letzteren 0 statt x setzt, so wollen wir der Gleichförmigkeit wegen, jede nach Potenzen von x fortlaufende gegebene oder gesuchte Reihe

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \cdots,$$

in welcher a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 &c. ganz beliebige gegebene oder

gesuchte Koeffizienten sind, in derselben Form schreiben, nämlich in der Form

$$\delta^0 a + \delta^1 a \cdot x + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{x^3}{3!} + \delta^4 a \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots;$$

oder allgemein die Reihe

$$S[a_\alpha \cdot x^\alpha] \text{ in der Form } S\left[\delta^\alpha a \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha!}\right],$$

dadurch, daß man allgemein

$$\delta^\alpha a = \alpha! a_\alpha$$

nimmt.

§. 243. Zusatz.

Wird dann diese unendliche Reihe zu gleicher Zeit durch a_x bezeichnet, also daß man hat

$$a_x = \delta^0 a + \delta^1 a \cdot x + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{x^3}{3!} + \delta^4 a \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

so folgt, wenn man hinter einander nach x differenziirt,

$$\begin{aligned}
\partial a_x &= \delta^1 a + \delta^2 a \cdot x + \delta^3 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^4 a \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\partial^2 a_x &= \delta^2 a + \delta^3 a \cdot x + \delta^4 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots \\
\partial^3 a_x &= \delta^3 a + \delta^4 a \cdot x + \cdots \\
\partial^4 a_x &= \delta^4 a + \cdots;
\end{aligned}$$

und setzt man in diesen Gleichungen zuletzt 0 statt x, so folgt wiederum, daß allemal und in jedem Falle unter den Zeichen

$$\delta^0 a, \quad \delta^1 a, \quad \delta^2 a, \quad \delta^3 a, \quad \cdots \quad \delta^n a,$$

das verstanden werden muß, was aus

$$a_x, \quad \partial a_x, \quad \partial^2 a_x, \quad \partial^3 a_x, \quad \cdots \quad \partial^n a_x$$

wird, wenn man zuletzt 0 statt x setzt, es mag unter a_x das obige V_x oder eine andere beliebig gegebene oder gesuchte, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verstanden werden.

So wie man endlich statt $\delta^0 a$ bloß a_0 schreiben kann, so schreibt man auch häufig bloß δa, δb, δV ꝛc. ꝛc. statt beziehlich $\delta^1 a$, $\delta^1 b$, $\delta^1 V$ ꝛc. ꝛc.

§. 244. Zusatz.

Aus dieser Bezeichnung und der so eben für sie gezogenen höchst wichtigen (ja in Bezug auf die nachstehende Praxis einzig wichtigen) Folgerung gehen augenblicklich folgende Gesetze hervor.

Sind die Koeffizienten zweier solchen Reihen a_x und b_x Funktionen eines veränderlichen x, oder mehrerer veränderlichen x, y, z; und hat man

I. $b_x = \partial^n(a_x)_x$, so ist auch $\delta^a b = \partial^n(\delta^a a)_x$.

Hat man aber

II. $b_x = \partial^{m,n}(a_x)_{x,y}$, so ist auch $\delta^a b = \partial^{m,n}(\delta^a a)_{x,y}$.

Ist dagegen

III. $b_x = \int_{\beta \div a} a_x \cdot dx$, so ist auch $\delta^a b = \int_{\beta \div a} \delta^a a \cdot dx$.

Und sollte noch

IV. $b_x = \int_{x'' \div x'} (\int_{y'' \div y'} a_x \cdot dy) \cdot dx$ seyn,

so wäre auch

$$\delta^a b = \int_{x'' \div x'} (\int_{y'' \div y'} \delta^a a \cdot dy) \cdot dx.$$

Und ähnlicher Folgerungen noch mehr, welche hier übergangen werden.

Da nämlich $\delta^a b = [\partial^a(b_x)_x]_0$ *) und $\delta^a a = [\partial^a(a_x)_x]_0$ ist, so folgen diese Behauptungen einzig und allein aus den (§§. 27. und 28. d. III. Th. d. S.), so wie aus den hiesigen (§§. 219—224.) unmittelbar. Nach diesen angeführten (§§.) ist es nämlich erlaubt, wenn a_x zuerst nach x differenziirt oder integrirt werden soll (oder nach x und y) und dann noch nach x, letzteres Geschäft zuerst vorzunehmen, und erstere dann folgen zu lassen. Erhält man aber in beiden Anordnungen ein und dasselbe Endresultat, so kann in selbigem, x jeden Werth, also

---

*) Man erinnere sich, daß $\partial^a(a_x)_x$ die ate Ableitung bedeutet nach x von der durch a_x bezeichneten Reihe; daß dagegen $\partial^a(a_x)_x$ bedeuten würde die ate Ableitung derselben Reihe, aber nach x. Uebrigens ist die Bezeichnung des (§. 204.) angewandt.

namentlich auch den Werth Null annehmen, auch bereits schon vorstellen, während nach anderen veränderlichen x, y ꝛc. differenzirt oder integrirt wird *).

Die Wahrheiten (I.—IV.) lassen sich auch kurz so schreiben. Es ist nämlich nach ihnen allemal

V. $\delta^a(\partial^n a_x) = \partial^n(\delta^a a)_x$

VI. $\delta^a(\partial^{m,n} a_{x,y}) = \partial^{m,n}(\delta^a a)_{x,y}$

VII. $\delta^a(\int_{\beta \div \alpha} a \cdot dx) = \int_{\beta \div \alpha} \delta^a a \cdot dx$

und VIII. $\delta^a(\int_{x'' \div x'}(\int_{y'' \div y'} a \cdot dy)dx) = \int_{x'' \div x'}(\int_{y'' \div y'} \delta^a a \cdot dy) \cdot dx$

wo die eingeklammerten Ausdrücke zur Linken in (V.—VIII.) das jedesmalige b in dem Zeichen $\delta^a b$ vorstellen, so also, daß man sich in diesen eingeklammerten Ausdrücken zur Linken zuerst a_x unter dem a vorgestellt denken muß, um die Reihe b_x zu haben, von welcher dann der Koeffizient von $\frac{x^a}{a!}$, unter den jedesmaligen in (V.—VIII.) zur Linken stehenden Ausdrücken zu verstehen ist, wenn in

---

*) Für manche Anfänger ist vielleicht nachstehende Ansicht wünschenswerther. Ist nämlich

$$b_x = \partial^n(a_x)_x$$

d. h.

$$b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \cdots$$
$$= \partial^n(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots)_x,$$

also auch
$$= \partial^n(a_0) + \partial^n(a_1)_x \cdot x + \partial^n(a_2)_x \cdot x^2 + \partial^n(a_3)_x \cdot x^3 + \cdots;$$

so müssen links und rechts auch die einzelnen Koeffizienten einer und derselben Potenz von x einander gleich seyn, also

$$b_0 = \partial^n(a_0)_x, \quad b_1 = \partial^n(a_1)_x, \quad b_2 = \partial^n(a_2)_x \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

und allgemein $b_a = \partial^n(a_a)_x$,

und auch $a! b_a = \partial^n(a! a_a)_x$,

d. h. $\delta^a b = \partial^n(\delta^a a)_x$,

weil man unter $\delta^a b$ das Produkt $a! b_a$ und unter $\delta^a a$ das Produkt $a! a_a$ versteht. — Eben so können die Sätze (II.—IV.) veranschaulicht werden.

den Gleichungen (V.—VIII.) überhaupt ein Sinn bemerkbar seyn soll.

Anmerkung. Diese Folgerungen (VII. und VIII.) erleiden aber nach (§. 221.) eine Abänderung, sobald die eine oder die andere Grenze der Integrale selber noch x enthalten sollte.

§. 245. Erste Haupt-Aufgabe.

Ist nun V eine beliebige Funktion einer beliebigen unendlichen Reihe

$$a_x \text{ oder } a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots$$

$$\text{d. h. } \delta^0 a + \delta^1 a \cdot x + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

und soll solche Funktion V selber wieder in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe V_x verwandelt werden; so hat man nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze

$$V_x = \delta^0 V + \delta^1 V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \delta^4 V \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

wenn unter $\delta^a V$ das verstanden wird, was aus $\partial^a V_x$ hervorvorgeht, wenn man 0 statt x schreibt.

Die ganze Aufgabe reduzirt sich also darauf, die unbekannten Koeffizienten $\delta^0 V$, $\delta^1 V$, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc. ꝛc. auszudrücken in die gegebenen $\delta^0 a$ oder a_0, $\delta^1 a$ oder a_1, $\delta^2 a$ oder $2! a_2$, $\delta^3 a$ oder $3! a_3$ ... $\delta^a a$ oder $a! a_a$.

Nun ist aber, weil V eine Funktion von a_x, und a_x wieder eine Funktion von x ist, nach (III. Th. d. S. §. 58.):

$$V_x = V_a \text{ *);}$$
$$\partial V_x = \partial V_a \cdot \partial a_x;$$

---

*) Häufig haben wir bisher f_a geschrieben, um damit das zu bezeichnen, was aus f_x wird, wenn man a statt x setzt. Wo keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, mag dies auch noch in der Folge so geschehen. Hier dagegen soll V_a die gegebene Funktion von a_x ausdrücken, nur a statt a_x geschrieben, aber dann doch a_x unter diesem a verstanden; V_x dagegen stellt die nach x fortlaufende, hier für $[V_a]_{a_x}$ gesuchte Reihe vor.

$$\partial^2 V_x = \partial^2 V_a \cdot (\partial a_x)^2 + \partial V_a \cdot \partial^2 a_x;$$
$$\partial^3 V_x = \partial^3 V_a \cdot (\partial a_x)^3 + 3\partial^2 V_a \cdot \partial a_x \cdot \partial^2 a_x + \partial V_a \cdot \partial^3 a_x;$$

u. s. w. f., wo unter dem bloßen a die Reihe a_x verstanden wird.

Folglich ist auch für $x = 0$,

1) $\delta^0 V = V_a$;
2) $\delta V = \partial V_a \cdot \delta a$;
3) $\delta^2 V = \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + \partial V_a \cdot \delta^2 a$;
4) $\delta^3 V = \partial^3 V_a \cdot \delta a^3 + 3\partial^2 V_a \cdot \delta a \cdot \delta^2 a + \partial V_a \cdot \delta^3 a$;

u. s. w. f.

wo aber jetzt zur Rechten in V_a, ∂V_a, $\partial^2 V_a$, $\partial^3 V_a$ ꝛc. unter a bloß der erste Koeffizient a_0 oder $\delta^0 a$ der Reihe a_x verstanden werden darf, in so fern sich a_x für $x = 0$ auf diesen ersten Koeffizienten zurückzieht.

Die praktische Regel für dieses mechanische Geschäft der Auffindung der Koeffizienten $\delta^0 V$, $\delta^1 V$ oder δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, $\delta^4 V$ ꝛc. ꝛc. ist also folgende:

„Man setze in dem gegebenen V, statt der unendlichen Reihe „a_x bloß a, so daß V eine bloße Funktion eines einzigen verän„derlichen a ist, denke sich a wiederum als Funktion von x, „nehme in diesem Sinne die Ableitungen von V nach allem x, „schreibe aber, statt der Ableitungszeichen ∂ nach x, die Zeichen „δ. In den Endresultaten stellt dann a wiederum das erste „Glied a_0 oder $\delta^0 a$ der Reihe a_x vor."

Oder mit andern Worten: „Man differenziire V_a hinter „einander unter der Voraussetzung, daß a selbst noch veränderlich „ist, und setze zuletzt, statt der da, $d^2 a$, ꝛc. nun δa, $\delta^2 a$ ꝛc., so hat „man die hier gesuchten Koeffizienten δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc., wenn „nur zuletzt in den Zusammensetzungen von a, das erste Glied „a_0 oder $\delta^0 a$ der Reihe a_x unter a verstanden wird."

Beispiel 1. Ist z. B.

$$V = (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots)^m = (a_x)^m$$

gegeben, so schreibe man $V = a^m$,
und erhält $\delta^0 V = a^m$, $\delta V = m \cdot a^{m-1} \cdot \delta a$;

$$\delta^2 V = m^{2|-1} \cdot a^{m-2} \cdot \delta a^2 + m \cdot a^{m-1} \cdot \delta^2 a;$$
$$\delta^3 V = m^{3|-1} \cdot a^{m-3} \cdot \delta a^3 + 3 \cdot m^{2|-1} \cdot a^{m-2} \cdot \delta a \cdot \delta^2 a + m a^{m-1} \cdot \delta^3 a;$$

u. s. w. f.;
und diese Werthe statt $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc.

in $$\delta^0 V + \delta V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

substituirt, geben die Polynomial-Potenz

$$(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots)^m,$$

wenn man nur unter $\delta^a a$ das Produkt $a! a_a$ versteht, oder zugleich $a! a_a$ statt $\delta^a a$ substituirt, und in den Potenzen von a, das erste Glied a_0 unter a versteht.

Beispiel 2. Ist ein andermal

$$V = log(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots)$$

nach Potenzen von x zu entwickeln, d. h. $V = log(a_x)$, so setze man

$$V = log\, a,$$

und findet daraus, nach der obigen praktischen Regel, d. h. wenn man hier a als Funktion von x ansieht, nach allem x die Ableitungen nimmt, und statt der Ableitungszeichen ∂ nach x, δ schreibt, außer $\delta^0 V = log\, a$, noch

$$\delta V = \frac{1}{a} \cdot \delta a,$$
$$\delta^2 V = -\frac{1}{a^2} \cdot \delta a^2 + \frac{1}{a} \cdot \delta^2 a,$$
$$\delta^3 V = 2\frac{1}{a^3} \cdot \delta a^3 - 3\frac{1}{a^2} \cdot \delta a \cdot \delta^2 a + \frac{1}{a} \cdot \delta^3 a,$$

u. s. w. f.;
und dies sind die Koeffizienten der Reihe V_x, letztere in der Form gedacht

$$\delta^0 V + \delta^1 V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \text{ꝛc. ꝛc.},$$

wenn nur zu gleicher Zeit $a! a_a$ statt $\delta^a a$ substituirt und a_0 unter a verstanden wird.

Beispiel 3. Auf demselben Wege kann man auch versuchen

$$V = \frac{\sqrt{(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots)} \cdot e^{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots}}{log(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots)}$$

in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe umzuformen.

Anmerkung. In dieser ersten Aufgabe des (§. 245.) stecken aber die bereits im (II. Th. d. S. §§. 572—580. §. 663.) gelöseten.

In dieser Aufgabe steckt namentlich auch wieder der Taylor'sche Lehrsatz, wenn nämlich a_x bloß a_0+x, d. h. $\delta a = 1$, $\delta^2 a = 0$, $\delta^3 a = 0$ u. s. w. f. wird, so daß $V_x = V_{a_0+x}$ nach ganzen Potenzen von x entwickelt werden soll. Die Formeln (1, 2, 3, 4 ꝛc. des §. 245.) geben jetzt

für $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, $\delta^4 V$, ꝛc. ꝛc.

beziehlich V_{a_0}, ∂V_{a_0}, $\partial^2 V_{a_0}$, $\partial^3 V_{a_0}$, $\partial^4 V_{a_0}$, ꝛc. ꝛc. —

In derselben Aufgabe steckt auch selbst wieder der Maclaurin'sche Lehrsatz, wenn $a_x = x$, demnach $a_0 = 0$, $a_1 = \delta a = 1$, $\delta^2 a = 0$, $\delta^3 a = 0$ ꝛc. ꝛc. ist. Jene Formeln (1, 2, 3, 4 ꝛc. des §. 245.) liefern nämlich nun

statt $\delta^0 V$, $\delta^1 V$, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc.

beziehlich V_a, ∂V_a, $\partial^2 V_a$, $\partial^3 V_a$ ꝛc.,

wenn man nur statt a jetzt a_0, d. h. jetzt 0 schreibt; dies sind jedoch die Werthe von

$$V_x,\ \partial V_x,\ \partial^2 V_x,\ \partial^3 V_x \text{ ꝛc.}$$

für $x = 0$ genommen.

§. 246. Zweite Haupt-Aufgabe.

Ist aber V eine Funktion zweier unendlichen Reihen

$$a_x \text{ oder } a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots.$$

$$\text{und } b_x \text{ oder } b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \ldots.,$$

wo a_0, a_1, a_2, a_3 ꝛc. b_0, b_1, b_2, b_3 ꝛc. ganz beliebige Koeffizienten sind, und soll nun V in die unendliche Reihe V_x oder

$$\delta^0 V + \delta V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

verwandelt werden; so finden sich die Koeffizienten $\delta^0 V$, $\delta^1 V$ oder δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc. ꝛc. theoretisch durch die Maclaurin'sche Reihe, so nämlich, daß

$$\delta^a V = [\partial^a V_{(x)}]_0$$

wird; aber hieraus sogleich praktisch auf folgende Art:

Man denkt sich V bloß als Funktion der beiden ersten Glieder a_0 und b_0 dieser Reihen, die jedoch durch a und b vorgestellt seyn mögen, betrachtet a und b als Funktionen von x, nimmt die Ableitungen nach allem x (dem §. 62. des III. Th. d. S. gemäß), schreibt aber statt der Ableitungszeichen ∂ nach x, überall das Zeichen δ. In den Endresultaten endlich denkt man sich unter a und b nichts anders als die ersten Glieder der Reihen a_x und b_x, so wie unter $\delta^a a$ und $\delta^a b$ beziehlich $a!\,a_a^2$ und $a!\,b_a$ *).

Nach dieser Regel erhält man:

1) $\delta^0 V = V_{a,b}$

2) $\delta V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b$

3) $\delta^2 V = \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b$

4) $\delta^3 V = \partial^3 V_a \cdot \delta a^3 + 3\partial^{2,1} V_{a,b} \cdot \delta a^2 \cdot \delta b + 3\partial^{1,2} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b^2 + \partial^3 V_b \cdot \delta b^3 + \partial V_a \cdot \delta^3 a + 3(\partial^2 V_a \cdot \delta a + \partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta b) \cdot \delta^2 a + 3(\partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a + \partial^2 V_b \cdot \delta b) \cdot \delta^2 b + \partial V_b \cdot \delta^3 b$;

u. s. w. f.

§. 247. Zusatz.

Wäre V, d. h. V_{a_x, b_x} für jeden Werth von x identisch $=0$, wäre also die so eben für V_{a_x, b_x} gefundene Reihe

$$\delta^0 V + \delta^1 V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

---

*) Um den Grund dieser Regel noch einmal anzugeben, bemerke man, daß offenbar $\delta^n V$ gefunden wird, wenn man in $\partial^n V_{(x)}$, 0 statt x setzt. Hier ist aber $V = V_{a_x, b_x}$ oder $= V_{a,b}$ wenn man sich in letzterem $V_{a,b}$ unter a und b noch die Reihen a_x, b_x vorgestellt denkt. Hat man aber $V_{a,b}$ unter dieser Voraussetzung hinter einander nach x differenziirt, und setzt man dann 0 statt x, so ziehen sich in den Endresultaten die Ausdrücke a_x, b_x, wirklich auf beziehlich a_0 und b_0 zurück, während $\partial^a a_x$, $\partial^a b_x$ für $x=0$ beziehlich in $\delta^a a$ und $\delta^a b$ sich verwandeln, nach (§§. 242. 243.).

identisch $=0$, so würde jeder der einzelnen Koeffizienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc. ebenfalls identisch $=0$ seyn, und die aus (1, 2, 3, 4 ꝛc. des §. 246.) entstehenden Gleichungen zeigten dann die Abhängigkeit, in welchen die Koeffizienten $\delta^0 b$, δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$ ꝛc. zu den Koeffizienten $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$ ꝛc. stehen, und dienten zur praktischen Auffindung der einen, in die andern ausgedrückt, in dem Falle, wo b_x eine durch die Gleichung

$$V_{a_x, b_x} = 0$$

verwickelt gegebene Funktion der unendlichen Reihe a_x wäre.

§. 248. Zusatz.

Wären daher in V_{a_x, b_x} des (§. 246.) die unendlichen Reihen a_x und b_x mittelst einer Gleichung $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ von einander abhängig, so würden die in den Gleichungen (1, 2, 3, 4 ꝛc. des §. 246.) gefundenen Ausdrücke für die Koeffizienten $\delta^0 V$, $\delta^1 V$, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, $\delta^4 V$ ꝛc. ꝛc. nothwendig dieselben bleiben, dagegen würden in diesen Ausdrücken die Koeffizienten $\delta^0 b$, δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$ ꝛc. ꝛc. von denen $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$ ꝛc. ꝛc. wiederum abhängig seyn, und zwar wären die einen in die andern auszudrücken mittelst der Gleichungen

$$\delta^0 \varphi = 0, \quad \delta \varphi = 0, \quad \delta^2 \varphi = 0, \quad \delta^3 \varphi = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.},$$

welche mit

$$\varphi_{a_x, b_x} = 0$$

zu gleicher Zeit statt finden (nach §. 247.), während nach demselben (§. 246.)

$$\begin{aligned}
\delta^0 \varphi &= \varphi_{a,b}, \\
\delta \varphi &= \partial \varphi_a \cdot \delta a + \partial \varphi_b \cdot \delta b, \\
\delta^2 \varphi &= \partial^2 \varphi_a \cdot \delta a^2 + 2\partial^{1,1} \varphi_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + \partial^2 \varphi_b \cdot \delta b^2 + \partial \varphi_a \cdot \delta^2 a \\
&\qquad + \partial \varphi_b \cdot \delta^2 b,
\end{aligned}$$

u. s. w. f. gefunden werden (unter a und b die ersten Glieder $\delta^0 a$ und $\delta^0 b$ der Reihen a_x, b_x verstanden), so daß diese Ausdrücke zur Rechten, der Null gleich gesetzt, grade die Gleichungen liefern, welche hier zur Bestimmung von $\delta^0 b$, δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, ꝛc.

in $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$ ꝛc. ꝛc. dienen. — Diese hieraus gefundenen Werthe für $\delta^0 b$, δb, $\delta^2 b$ ꝛc. ꝛc. mußten dann in die Resultate des (§. 246.) substituirt werden, wenn man die Entwicklung des dortigen V_{a_x, b_x}, in dem jetzigen Fall, bloß in die Koeffizienten von a_x ausgedrückt haben wollte.

Anmerkung 1. Der Satz des (§. 246.) enthält den Taylor'schen Lehrsatz für 2 Veränderliche (III. Th. d. S. §. 32.) als einen besondern Fall in sich, wenn nämlich V ursprünglich eine Funktion von a und b ist, und dann $V_x = V_{a+x\cdot\delta a, b+x\cdot\delta b}$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickelt werden soll, während b von a, also auch $b+x\cdot\delta b$ von $a+x\cdot\delta a$ unabhängig, und eben deshalb auch δb und δa, gleichmäßig von x unabhängig sind. — Es ist nämlich dasmal

$$a_x = a+x\cdot\delta a, \quad \text{also} \quad \delta^0 a = a, \quad \delta^2 a = \delta^3 a = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0;$$
$$b_x = b+x\cdot\delta b, \quad \text{also} \quad \delta^0 b = b, \quad \delta^2 b = \delta^3 b = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0.$$

Und die Formeln (1, 2, 3, 4 ꝛc. des §. 245.) gehen daher jetzt über in

$$\delta^0 V = V_{a,b}$$
$$\delta^1 V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b$$
$$\delta^2 V = \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + 2\cdot\partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + \partial^2 \cdot V_b \cdot \delta b^2;$$

u. s. w. f., wodurch sich genau dasselbe Resultat ergibt, wie solches (§. 32. N. 4 des III. Th. d. S.) für dieselbe Aufgabe zu finden ist.

Und setzte man hier $x\cdot\delta a = \Delta a$ und $x\cdot\delta b = \Delta b$ d. h. $\frac{\Delta a}{x}$ statt δa und $\frac{\Delta b}{x}$ statt δb, so würde aus der gegenwärtigen Reihe, für $V_{a+\Delta a, b+\Delta b}$ genau wiederum das (§. 29. N. 3. des III. Th. d. S.) stehende Resultat hervorgehen, d. h. der Taylor'sche Lehrsatz für zwei Veränderliche, nur daß dort, was hier V, a, b vorstellen, beziehlich durch f, x, y vorgestellt ist.

Anmerkung 2. Dagegen enthält die Aufgabe des (§. 248.) unter anderen auch diejenige spezielle Aufgabe in sich, wo V eine unmittelbare Funktion $V_{a,b}$ von a und b, dagegen b selber wieder eine Funktion b_a von a ist, so daß V eine gemischte Funktion

$V_{(a)}$ von a wird, d. h. a unmittelbar (explizit) und zugleich mittelbar (implizit) in b, enthält; und wenn dann $a+x\cdot\delta a$ statt allem a gesetzt, und nun $V_{(a+x\cdot\delta a)}$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt werden soll.

So wie nämlich in b_a, $a+x\cdot\delta a$ statt a gesetzt wird, so geht b_a in $b_{a+x\cdot\delta a}$, d. h. in eine (durch den Taylor'schen Lehrsatz auszumittelnde, hier aber durch b_x d. h. durch $\delta^0 b+\delta b\cdot x+\delta^2 b\cdot\frac{x^2}{2!}+\delta^3 b\cdot\frac{x^3}{3!}+\cdots$ bezeichnete, und auch nach der hiesigen Methode zu findende) unendliche Reihe über; und in so fern auch $a+\delta a\cdot x$ als eine unendliche Reihe a_x angesehen werden kann, (deren folgende Koeffizienten $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, $\delta^4 a$ ꝛc. ꝛc. alle $=0$ sind), so ist $V_{(a+x\cdot\delta a)}$ das jetzige V_x (der §§. 246. u. 248.) während eine Gleichung $\varphi_{a,b}=0$ existiren muß, durch welche $b=b_a$ gegeben ist, für jedes a, also auch wenn a in a_x und b in das zugehörige b_x übergeht; also daß auch die Gleichung

$$\varphi_{a_x,b_x}=0$$

statt findet, und mit ihr die Gleichungen

$\delta^0\varphi=0$ d. h. $\varphi_{a,b}=0$

$\delta\varphi=0$ oder $\partial\varphi_a\cdot\delta a+\partial\varphi_b\cdot\delta b=0$

$\delta^2\varphi=0$ oder $\partial^2\varphi_a\cdot\delta a^2+2\cdot\partial^{1,1}\varphi_{a,b}\cdot\delta a\cdot\delta b+\partial^2\varphi_b\cdot\delta b^2+\partial\varphi_b\cdot\delta^2 b=0$;

u. s. w. f., welche zur Bestimmung von δb in δa, $\delta^2 b$ in δa^2, ꝛc. ꝛc. dienen, alles wie im (§. 248.) vorausgesetzt worden war *).

---

*) Im (III. Th. d. S. §§. 43. 44.) sind die Zuwachse von f, x, y ꝛc. alle gleichmäßig durch $x\cdot\delta f$, $x\cdot\delta x$, $x\cdot\delta y$ ꝛc. bezeichnet. Ist demnach y selber eine Funktion von x, welche der dortigen Bezeichnung zu Folge in $y+x\cdot\delta y$ übergeht, so oft $x+x\cdot\delta x$ statt x gesetzt wird, so bezeichnet das dortige $x\cdot\delta y$, die ganze Reihe, welche hier durch $\delta y\cdot x+\delta^2 y\cdot\frac{x^2}{2!}+\delta^3 y\cdot\frac{x^3}{3!}+\delta^4 y\cdot\frac{x^4}{4!}+\cdots$ bezeichnet werden müßte, weil wir hier ein für allemal zur unveränderten Bedingung machen, daß δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. bloß Koeffizienten sind der verschiedenen Potenzen $\frac{x}{1}$, $\frac{x^2}{2!}$, $\frac{x^3}{3!}$, ... also nie, wie zuweilen dort der Fall ist, selber wieder Reihen, die nach Potenzen von x fortlaufen.

Der Taylor'sche Lehrsatz liefert übrigens für diesen besondern Fall dieselbe Reihe, in so fern diese gesuchte Reihe V$_{\varkappa}$ d. h. V$_{(a+\varkappa.\delta a)}$ eben so gut die eben gefundene

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \varkappa + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \text{ꝛc. ꝛc.},$$

als auch nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$V_{(a)} + \partial V_{(a)} \cdot \delta a \cdot \varkappa + \partial^2 V_{(a)} \cdot \delta a^2 \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \partial^3 V_{(a)} \cdot \delta a^3 \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$$

seyn muß, während nach (III. Th. d. S. §. 63.)

$$\partial V_{(a)} = \partial V_a + \partial V_b \cdot \partial b_a,$$
$$\partial^2 V_{(a)} = \partial^2 V_a + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \partial b_a + \partial^2 V_b \cdot \partial b_a^2 + \partial V_b \cdot \partial^2 b_a,$$

u. s. w. f. ist, und dabei noch b_a, ∂b_a, $\partial^2 b_a$ ꝛc. selber wieder sich aus den Gleichungen

$$\varphi_{(a)} = 0, \quad \partial\varphi_{(a)} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial\varphi_a + \partial\varphi_b \cdot \partial b_a = 0,$$
$$\partial^2\varphi_{(a)} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial^2\varphi_a + 2 \cdot \partial^{1,1}\varphi_{a,b} \cdot \partial b_a + \partial^2\varphi_b \cdot \partial b_a^2 + \partial\varphi_b \cdot \partial^2 b_a = 0,$$

u. s. w. f. finden lassen, wodurch man genau wieder zu derselben Reihe V$_{\varkappa}$ für V$_{(a+\varkappa.\delta a)}$ gelangt, zu welcher man kurz zuvor ebenfalls gekommen ist.

Anmerkung 3. Die Aufgabe des (§. 247.) enthält unter ihren speziellen Fällen, namentlich auch folgende:

1) Ist b eine durch die Gleichung $\varphi_{a,b} = 0$ gegebene Funktion von a, und ist $a_{\varkappa}$ ein anderer Werth von a, so wie $b_{\varkappa}$ der aus dieser Gleichung zu findende Werth von b, so existirt also auch noch die Gleichung

$$\varphi_{a_{\varkappa},b_{\varkappa}} = 0$$

für jeden Werth von $\varkappa$; also existiren auch noch die Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, $\delta^3\varphi = 0$ ꝛc.

2) Und diese Gleichungen gehen in die Differenzial-Gleichungen $\partial\varphi_{(a)} = 0$, $\partial^2\varphi_{(a)} = 0$, $\partial^3\varphi_{(a)} = 0$ ꝛc. über, in dem besondern Fall, wo unter $a_{\varkappa}$ bloß $a+\varkappa$ verstanden, also $\delta a = 1$, $\delta^2 a = \delta^3 a = \text{ꝛc.} = 0$ genommen, zugleich aber

statt δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$ ꝛc. ꝛc.,

welches die Koeffizienten der für b_x, d. h. der jetzt für b_{a+x} zu findenden Reihe sind, die beziehlich mit ihnen identischen

$$\partial b_a,\quad \partial^2 b_a,\quad \partial^3 b_a \text{ ꝛc. ꝛc.},$$

gesetzt werden, welche für diesen besondern Fall auch der Taylor'sche Lehrsatz liefert.

3) Ist endlich a_x bloß x, also $\delta a = 1$, $\delta^2 a = 0$, $\delta^3 a = 0$ ꝛc., und auch $a_0 = 0$, so ist b_x der Werth von b, wie er aus $\varphi_{a,b} = 0$ für $a = x$, also wie er sich aus $\varphi_{x,b} = 0$ für b ergibt, so daß also derselbe Satz auch dazu dient, die Auflösung einer Gleichung $\varphi = 0$, zwischen b und x, nach dem Unbekannten b in Form einer, nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihe b_x, herzustellen.

4) Deshalb könnte man sich desselben Satzes auch zur Umkehrung der Reihen bedienen.

Ist z. B. gegeben die Gleichung

I. $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots$ in inf.
$$= p_0 + p_1 \cdot b + p_2 \cdot b^2 + p_3 \cdot b^3 + \cdots \text{ in inf.},$$

wo a_0, a_1, a_2 ꝛc., p_0, p_1, p_2, p_3 ꝛc. beliebige Koeffizienten sind, und sollte nun $b = b_x$ gefunden werden, so hätte man statt $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ jetzt die Gleichung

II. $p_0 - a_x + p_1 \cdot b_x + p_2 \cdot b_x^2 + p_3 \cdot b_x^3 + \cdots$ in inf. $= 0$,

aus welcher dann zur Bestimmung der Koeffizienten b_0, δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$ ꝛc. sogleich hervorgehen die Gleichungen

1) $p_0 - a_0 + p_1 \cdot b_0 + p_2 \cdot b_0^2 + p_3 \cdot b_0^3 + p_4 \cdot b_0^4 + \cdots = 0$,

2) $-\delta a + (p_1 + 2p_2 \cdot b + 3p_3 \cdot b^2 + 4p_4 \cdot b^3 + \cdots) \cdot \delta b = 0$,

3) $$\left.\begin{aligned} -\delta^2 a + (2p_2 + 2 \cdot 3 \cdot p_3 \cdot b + 3 \cdot 4 \cdot p_4 \cdot b^2 + \cdots) \cdot \delta b^2 \\ + (p_1 + 2p_2 \cdot b + 3p_3 \cdot b^2 + \cdots) \cdot \delta^2 b \end{aligned}\right\} = 0,$$

u. s. w. f.

In dem besondern Falle, wo $p_0 = a_0$ ist, würde $b_0 = 0$ einer der Werthe von b seyn, welcher der Gleichung (1.) genügt, und zu diesem ersten Koeffizienten b_0 fände sich dann

aus (2.) $$\delta b = \frac{\delta a}{p_1} = \frac{a_1}{p_1},$$

aus (3.) $\delta^2 b = \frac{\delta^2 a - 2p_2 \cdot \delta b^2}{p_1} = \frac{2 \cdot a_2 \cdot p_1^2 - 2 \cdot p_2 \cdot a_1^2}{p_1^3}$,

u. s. w. f.,

so daß sich hier genau dieselben Resultate ergeben, welche im (II. Th. d. S. §§. 581. 582.) für diese Aufgabe und für die besondern Fälle derselben bereits gefunden worden sind.

§. 249. Zusatz.

Die Aufgabe des (§. 248.) enthält natürlich auch den Fall als einen besonderen in sich, wo V bloß eine Funktion von $b_\varkappa$ allein ist, dagegen diese Reihe $b_\varkappa$ selber nicht gegeben, sondern mittelst einer Gleichung

$$\varphi_{a_\varkappa, b_\varkappa} = 0$$

in die Koeffizienten einer gegebenen Reihe $a_\varkappa$, ausgedrückt und gefunden werden muß.

Man findet dann (wie im §. 245.)

1) $\delta^0 V = V_b$,
2) $\delta^1 V = \partial V_b \cdot \delta b$,
3) $\delta^2 V = \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial V_b \cdot \delta^2 b$,

u. s. w. f., wenn nur $\delta^0 b$ oder b_0 statt b (in V_b, ∂V_b, $\partial^2 V_b$ ꝛc. ꝛc.) gesetzt wird; während wiederum statt $\delta^0 b$ oder b_0, δb, $\delta^2 b$ ꝛc. die Werthe gesetzt werden müssen, welche aus (§. 248.) und zwar aus den Gleichungen $\delta^0 \varphi = 0$ d. h. $\varphi = 0$, $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$ ꝛc. ꝛc. für solche hervorgehen.

Anmerkung. Unter den speziellen Fällen, welche hierin wieder stecken, mag der herausgehoben seyn, wo aus der Gleichung

$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots$ in inf. $= p_0 + p_1 \cdot b + p_2 \cdot b^2 + p^3 \cdot b^3 + \cdots$

nicht $b = b_\varkappa$ allein, sondern eine beliebige Funktion V von b in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt werden soll. — Eben so steckt darin auch das sogenannte Lagrange'sche Problem, seinem Grundwesen nach, welches wir jedoch später noch besonders betrachten wollen.

§. 250. Dritte Haupt-Aufgabe.

Ist aber $V_{a_x, b_x, c_x,}$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende und einstweilen durch V_x oder

$$\delta^0 V + \delta V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \delta^4 V \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

bezeichnete Reihe zu verwandeln, so erhält man wiederum den Koeffizienten $\delta^a V$ derselben, wenn man in $V_{a,b,c,}$ die a, b, c selber wieder als Funktionen von x sich denkt, dann aber die ate Ableitung nach allem x nimmt, und in dem Endresultat (also natürlich auch schon während des mechanischen Schreibens) in allen Ableitungen nach x die hiesigen δ statt der ∂ setzt, übrigens unter a, b, c beziehlich die ersten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 c$ ꝛc. der durch a_x, b_x, c_x vorgestellten unendlichen Reihen

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots$$
$$b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \cdots$$
$$c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \cdots$$

versteht, während dann wiederum $\alpha! a_\alpha$ statt $\delta^a a$, und $\alpha! b_\alpha$ statt $\delta^a b$, so wie $\alpha! c_\alpha$ statt $\delta^a c$ gesetzt werden muß, wobei a_0, a_1, a_2, a_3 ···, b_0, b_1, b_2, b_3 ···, c_0, c_1, c_2 ··· als beliebig gegebene Koeffizienten vorausgesetzt werden.

Man findet daher sogleich

$$\delta^0 V = V_{a,b,c,}$$
$$\delta V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b + \partial V_c \cdot \delta c,$$
$$\delta^2 V = \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b + \partial V_c \cdot \delta^2 c + \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \delta^2 V_c \cdot \delta c^2 + 2\partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + 2\partial^{1,1} V_{a,c} \cdot \delta a \cdot \delta c + 2\partial^{1,1} V_{b,c} \cdot \delta b \cdot \delta c,$$

u. s. w. f. *).

---

*) Wollte man die Form der Differenzial-Rechnung anwenden, so würde die oben gegebene praktische Regel für die Auffindung von $\delta^a V$ sich so ausnehmen: „Um $\delta^a V$ zu finden, nehme man das ate Differenzial von V als Funktion von a, b, c unter der Voraussetzung, daß a, b, c selbst wieder veränderlich sind; schreibe aber im Endresultate

Anmerkung. Daß in dieser Haupt-Aufgabe wiederum jede der beiden vorhergehenden Haupt-Aufgaben der (§. 245. u. §. 246.) als besondere Fälle stecken, fällt von selbst in die Augen.

§. 251. Zusatz.

I. Ist $$V_{a_x, b_x, c_x} = 0$$

für jedes x, so hat man natürlich auch $\delta^0 V = 0$, $\delta V = 0$, $\delta^2 V = 0$, $\delta^3 V = 0$ ꝛc. ꝛc., durch welche Gleichungen, wenn man für δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc. die im vorigen (§. 250.) gefundenen Entwicklungen setzt, die Abhängigkeit der Koeffizienten δa, δb, δc, $\delta^2 a$, $\delta^2 b$ ꝛc. ꝛc. von einander bestimmt und festgesetzt ist; so daß z. B. die Koeffizienten δc, $\delta^2 c$, $\delta^3 c$ ꝛc. ꝛc. der Reihe c_x, in die Koeffizienten von a_x und b_x ausgedrückt, gefunden werden können.

II. Und hätte man zwei solche Gleichungen

$$V_{a_x, b_x, c_x} = 0 \quad \text{und} \quad W_{a_x, b_x, c_x} = 0,$$

durch welche die unendlichen Reihen b_x und c_x von der einzigen a_x abhängig sind, so hätte man nicht bloß

$$\text{I.} \ldots \quad \delta V = 0, \quad \delta^2 V = 0, \quad \delta^3 V = 0 \text{ ꝛc. ꝛc.},$$

sondern auch noch

$$\text{II.} \ldots \quad \delta W = 0, \quad \delta^2 W = 0, \quad \delta^3 W = 0 \text{ ꝛc. ꝛc.},$$

so daß mittelst dieser Gleichungen (I. und II.), und mittelst der Entwicklungen des vorhergehenden (§. 250.) die Koeffizienten δc,

---

in den Differenzialien da, d^2a, d^3a ꝛc., db, d^2b, d^3b ꝛc., dc, d^2c ꝛc. jetzt überall δ statt d. Die obenstehenden Koeffizienten nehmen sich dann so aus

$$\delta^0 V = V;$$

$$\delta V = \frac{dV}{da} \cdot \delta a + \frac{dV}{db} \cdot \delta b;$$

$$\delta^2 V = \frac{dV}{da} \cdot \delta^2 a + \frac{dV}{db} \cdot \delta^2 b + \frac{dV}{dc} \cdot \delta^2 c + \frac{d^2V}{da^2} \cdot \delta a^2 + \frac{d^2V}{db^2} \cdot \delta b^2 + \frac{d^2V}{dc^2} \cdot dc^2 + 2\frac{d^2V}{da \cdot db} \cdot \delta a \cdot \delta b + 2\frac{d^2V}{da \cdot dc} \cdot \delta a \cdot \delta c + 2\frac{d^2V}{db \cdot dc} \cdot \delta b \cdot \delta c;$$

u. s. w. f.

$\delta^2 c$, $\delta^3 c$ ꝛc. und δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$ ꝛc. in die Koeffizienten der Reihe a_n ausgedrückt, gefunden werden können.

§. 252. Zusatz.

In der allgemeinen Aufgabe des (§. 250.) können

1) a_n, b_n, c_n von einander ganz unabhängig seyn, und dann sind auch die Koeffizienten δa, δb, δc, $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, $\delta^2 c$ ꝛc. von einander ganz unabhängig. — Oder

2) es kann zwischen a_n, b_n, c_n noch eine Gleichung

$$\varphi_{a_n, b_n, c_n} = 0$$

statt finden, und gegeben seyn, und dann sind nach (§. 251. I.), außer $\delta^0 \varphi = 0$ d. h. $\varphi_{a,b,c} = 0$, auch noch

$$\delta\varphi = 0, \quad \delta^2\varphi = 0, \quad \delta^3\varphi = 0 \text{ ꝛc.}$$

die Gleichungen, durch welche $\delta^0 c$, δc, $\delta^2 c$, $\delta^3 c$ ꝛc. ꝛc. in die beliebigen und von einander unabhängigen Koeffizienten von a_n und b_n ausgedrückt werden können; so daß man dann diese Werthe statt δc, $\delta^2 c$, $\delta^3 c$ ꝛc. ꝛc. in die Ausdrücke für δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc. des (§. 250.) substituiren kann. Oder

3) es können zwischen a_n, b_n, c_n noch zwei Gleichungen

$$\varphi_{a_n, b_n, c_n} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{a_n, b_n, c_n} = 0$$

gegeben seyn, und dann sind

$$\delta^0\varphi = 0, \quad \delta\varphi = 0, \quad \delta^2\varphi = 0, \quad \delta^3\varphi = 0 \text{ ꝛc. ꝛc.}$$
$$\delta^0\psi = 0, \quad \delta\psi = 0, \quad \delta^2\psi = 0, \quad \delta^3\psi = 0 \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

die Gleichungen, durch welche die Koeffizienten $\delta^0 c$, δc, $\delta^2 c$, $\delta^3 c$ ꝛc., δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$ ꝛc. nach (§. 251. II.) in die unabhängigen $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$ ꝛc. ausgedrückt sind; so daß diese Werthe statt $\delta^0 b$, $\delta^0 c$, δb, δc, $\delta^2 b$, $\delta^2 c$ ꝛc. ꝛc. in die Ausdrücke für $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc. des (§. 250.) substituirt werden können *).

---

*) Dieser Fall tritt schon ein, sobald V eine Funktion von a, b, c ist, zwischen a, b, c aber zwei Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ ge-

4) Es können aber auch b_x und c_x Ableitungen (Differenziale) oder auch Integrale seyn von a_x, nach einem veränderlichen x oder nach mehreren veränderlichen x, y u. s. w. Dann sind die Koeffizienten $\delta^0 b$, δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$ ꝛc. δc, $\delta^2 c$, $\delta^3 c$ ꝛc. dieselben Ableitungen oder dieselben Integrale beziehlich von den unabhängigen Koeffizienten $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$ ꝛc., und zwar genau so, wie solches im (§. 244.) bereits gehörig und ein für allemal angezeigt und erörtert worden ist.

5) Und in allen den vorbenannten Fällen kann die Funktion V auch nur zwei dieser unendlichen Reihen, etwa nur b_x und c_x, oder wohl gar nur eine einzige derselben, etwa c_x enthalten, während dann in den (N. N. 2—4.) gerade a_x mit seinen Koeffizienten als unabhängig angesehen werden kann; so etwa, daß verlangt wird, die Koeffizienten δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc., wo möglich bloß in diese unabhängigen δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$ ꝛc. auszudrücken. (Vgl. §. 249.).

§. 253. Allgemeinere Haupt-Aufgabe.

Das Vorhergehende setzt uns aber in den Stand, eine Funktion V von beliebig vielen solchen unendlichen Reihen a_x, b_x, c_x, e_x ꝛc. ꝛc. in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln, dadurch daß man diese gesuchte Reihe durch

$$S\left[\delta^a V \cdot \frac{x^a}{a!}\right]$$

bezeichnet, und nun $\delta^a V$ praktisch findet, indem man

---

geben sind, und nun das, was aus V wird, wenn man $a+x$ statt a setzt, in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt werden soll. Denn da, vermöge $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, b und c als Funktionen von a gedacht werden müssen, welche in b_{a+x} (jetzt durch b_x bezeichnet) und in c_{a+x} (jetzt durch c_x bezeichnet) übergehen, so oft $a+x$ statt a gesetzt wird; so wird V jetzt eine Funktion von $a+x$ und den beiden unendlichen Reihen b_{a+x} oder b_x und c_{a+x} oder c_x, während auch $a+x$ als eine unendliche Reihe a_x gedacht werden kann, in welcher jedoch $\delta a = 1$ und $\delta^2 a = \delta^3 a =$ ꝛc. ꝛc. $= 0$ sind.

$V_{a,b,c,e,\ldots}$

α mal hinter einander differenziirt, a, b, c, e ꝛc. ꝛc. selbst wieder als veränderlich (als Funktionen von x) ansehend; zuletzt unter a, b, c, e ꝛc. nur die ersten Glieder der Reihen sich denkt, dabei aber in den Differenzialien da, db, dc, de ꝛc. d^2a, d^2b, d^2c, d^2e ꝛc. d^3a ꝛc. ꝛc. (oder in den Ableitungen von a, b, c, e ꝛc. nach x) überall δ statt der d (oder statt der ∂) setzt.

Und dies Verfahren bleibt allemal dasselbe, es mögen die Reihen a_x, b_x, c_x, e_x ꝛc. von einander ganz unabhängig, oder einige derselben Differenzialien oder Integralien von den andern seyn, oder man mag eine Abhängigkeit zwischen diesen Reihen durch Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ꝛc. gegeben haben.

§. 254. Zusatz.

I. Und ist eine solche Funktion V mehrerer und beliebig vieler solcher Reihen a_x, b_x, c_x, e_x ꝛc. identisch (für jedes x) der Null gleich, so sind auch die einzelnen durch δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc. bezeichneten Koeffizienten, jeder für sich, der Null gleich, so daß also mit der Gleichung $\delta^0 V = 0$ oder $V = 0$ die andern Gleichungen

$$\delta V = 0, \quad \delta^2 V = 0, \quad \delta^3 V = 0 \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

zu gleicher Zeit statt finden müssen.

II. Sollte aber eine solche Funktion V mehrerer und beliebig vieler solcher Reihen nicht $= 0$, sondern einer (wenn auch noch unbekannten) Konstante C gleich seyn (d. h. so daß C nach x konstant, d. h. von x ganz unabhängig ist), so würde aus $V = C$ hervorgehen

$$V - C = 0,$$

also, wenn $V - C$ durch W bezeichnet wird, nicht bloß $W = 0$, sondern auch

$$\delta W = 0, \quad \delta^2 W = 0, \quad \delta^3 W = 0 \text{ ꝛc.}$$

Weil aber nach dem Verfahren (I.)

$$\delta W = \delta V, \quad \delta^2 W = \delta^2 V, \quad \delta^3 W = \delta^3 V \text{ ꝛc.}$$

gefunden wird; so folgt noch, daß bereits

$$\delta V = 0, \quad \delta^2 V = 0, \quad \delta^3 V = 0 \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

seyn müsse, so oft nur zur Bedingung gemacht ist, daß V nach $\varkappa$ konstant werden, d. h. von $\varkappa$ selbst ganz unabhängig bleiben soll.

§. 255. Zusatz.

In dieser allgemeineren Haupt-Aufgabe sind aber nicht bloß die Aufgaben der (§§. 245. 246 und 250.) enthalten, sondern auch alle diejenigen Aufgaben, wo V eine Funktion von $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ꝛc., und den Ableitungen oder Integralen von $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ꝛc. nach x, oder nach x und y seyn sollte, indem letztere selber wieder unendliche Reihen nach $\varkappa$ seyn werden, und dann etwa durch $c_\varkappa$, $e_\varkappa$ ꝛc. oder $f_\varkappa$, $g_\varkappa$ ꝛc. vorgestellt seyn können, während dann zwischen $\delta^a f$, $\delta^a g$ ꝛc. und $\delta^a a$, $\delta^a b$ ꝛc. die in dem (§. 244.) gehörig beschriebenen Abhängigkeiten statt finden.

Als Beispiel denke man sich, daß V eine Funktion von $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $\partial(a_\varkappa)_x$, $\partial(b_\varkappa)_x$ wäre, und nun in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ vorgestellte Reihe verwandelt werden sollte. Man hätte dann, wenn man der Kürze wegen $\partial(a_\varkappa)_x$, $\partial(b_\varkappa)_x$ beziehlich durch y und z bezeichnet, und wenn, wie immer, die gesuchte Reihe $V_\varkappa$ durch

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \varkappa + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

vorgestellt wird, die Koeffizienten dieser Reihe $V_\varkappa$ wie folgt:

$$\delta^0 V = V_{a,b,y,z}$$

$$\delta V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b + \partial V_y \cdot \partial(\delta a)_x + \partial V_z \cdot \partial(\delta b)_x \text{ *);}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 V = {} & \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial^2 V_y \cdot (\partial \delta a)^2 + \partial^2 V_z \cdot (\partial \delta b)^2 \\ & + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{a,y} \cdot \delta a \cdot \partial \delta a + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{a,z} \cdot \delta a \cdot \partial \delta b \\ & + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{b,y} \cdot \delta b \cdot \partial \delta a + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{b,z} \cdot \delta b \cdot \partial \delta b + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{y,z} \cdot \partial \delta a \cdot \partial \delta b \\ & + \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b + \partial V_y \cdot \partial \delta^2 a + \partial V_z \cdot \partial \delta^2 b.\end{aligned}$$

Eben so $\delta^3 V$ ꝛc. Weil man nämlich $\partial(a_\varkappa)_x$ durch $y_\varkappa$ und $\partial(b_\varkappa)_x$ durch $z_\varkappa$ bezeichnet hat, so wird man in den einzelnen Gliedern zu Faktoren erhalten

$$\delta y, \quad \delta z, \quad \delta^2 y, \quad \delta^2 z \text{ ꝛc.,}$$

welche man zwar häufig auch durch

---

*) Es ist nämlich nach (§. 244.) $\delta y = \partial(\delta a)_x$ und $\delta z = \partial(\delta b)_x$,

$\delta\partial a$, $\delta\partial b$, $\delta^2\partial a$, $\delta^2\partial b$ ꝛc.

bezeichnet, welche aber allemal vorstellen beziehlich

$\partial\delta a$, $\partial\delta b$, $\partial\delta^2 a$, $\partial\delta^2 b$ ꝛc.;

in der ganzen Untersuchung lauter Ableitungen ∂ nach x verstanden.

§. 256. Noch allgemeinere Haupt-Aufgabe.

Man kann auch noch folgende Aufgabe betrachten: Es ist V eine Funktion von a, b ꝛc. und noch von x, y ꝛc. Zuerst werden statt x, y ꝛc. unendliche, nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihen gesetzt, deren Koeffizienten $\delta^0 x$, δx, $\delta^2 x$ ꝛc., $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$ ꝛc. selber wieder Funktionen von a, b ꝛc. sind; hernach aber werden überall statt a, b ꝛc. (also sowohl da, wo a, b ꝛc. explicit, als auch da, wo solche implicit in $\delta^0 x$, δx, $\delta^2 x$ ꝛc. $\delta^0 y$, δy ꝛc. vorkommen) wiederum unendliche Reihen gesetzt, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen: man soll nun die Koeffizienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$ ꝛc. der nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufenden Reihe finden, in welche V selbst dadurch übergehen kann.

Erste Auflösung.

Um diese Aufgabe zu lösen, wird man sich zuerst bloß die Reihen für x, y ꝛc. allein gesetzt denken. Dadurch geht schon V in eine Reihe über, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortläuft, welche nicht die in der Aufgabe gesuchte ist, welche wir aber einstweilen nach (§. 253.) aufsuchen, ihre Koeffizienten jedoch (zum Unterschiede von den Koeffizienten in der eigentlich für V gesuchten Reihe) durch $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, $\delta_1^3 V$ ꝛc. bezeichnen wollen; so daß nach (§. 253.) ist:

1) $\delta_1^0 V = V_{a,b\ldots x,y\ldots}$;

2) $\delta_1 V = \partial V_x \cdot \delta x + \partial V_y \cdot \delta y + \ldots$;

3) $\delta_1^2 V = \partial^2 V_x \cdot \delta x^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y + \partial^2 V_y \cdot \delta y^2 + \ldots$
$+ \partial V_x \cdot \delta^2 x + \partial V_y \cdot \delta^2 y + \ldots$;

u. s. w. f., wenn nur zur Rechten statt x, y ꝛc. (in V, ∂V_x, ∂V_y, $\partial^2 V_x$ ꝛc.) überall $\delta^0 x$, $\delta^0 y$ ꝛc., d. h. die ersten Glieder der für x, y ꝛc. gesetzten Reihen gedacht werden.

Bezeichnen wir nun diese einstweilen erhaltene unendliche Reihe

$$4)\ \delta_1^0 V + \delta_1 V \cdot x + \delta_1^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta_1^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ durch } V_x,$$

so wie die in der Aufgabe eigentlich gesuchte Reihe

$$5)\ \delta^0 V + \delta V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ durch } V_{(x)};$$

so entsteht offenbar $V_{(x)}$ dadurch aus V_x, daß man in letzterem V_x (als Funktion von $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ ꝛc. angesehen, während $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ ꝛc. die Buchstaben a, b ꝛc. explizit und auch implizit in $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, δx, δy ꝛc. enthalten) überall statt aller a, b ꝛc. diese anderen Reihen

$$a_x \text{ oder } \delta^0 a + \delta a \cdot x + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

$$b_x \text{ oder } \delta^0 b + \delta b \cdot x + \delta^2 b \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

u. s. f. substituirt.

Nun findet man aber die Koeffizienten

$$\delta^0 V,\ \delta V,\ \delta^2 V,\ \delta^3 V \text{ ꝛc.}$$

dem (§. 243.) zu Folge, wenn man $V_{(x)}$ (also auch V_x, sobald man in letzterm unter den Koeffizienten $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ ꝛc. die Funktionen von x sich vorgestellt denkt, welche aus denselben Koeffizienten dadurch hervorgehen, daß alles a, b ꝛc. in die Reihen a_x, b_x ꝛc. übergeht) nach allem x (d. h. nach dem x, was in $V_{(x)}$ außerhalb, und auch nach dem x, welches in $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ ꝛc. eingeht) differenziirt, keinmal, einmal, zweimal, dreimal u. s. f., zuletzt aber 0 (Null) statt x setzt.

Man erhält daher, wenn man der Kürze wegen voraussetzt, daß bloß statt der beiden Buchstaben a und b solche Reihen a_x und b_x gesetzt worden sind:

$$6)\ \delta^0 V = \delta_1^0 V = V_{a,b,x,y\cdots};$$

wenn hier zuletzt unter x, y ··· jene Anfangsglieder $\delta^0 x$, $\delta^0 y$ ꝛc. verstanden werden, und wenn man nachher statt jedes a und jedes b,

es mag explizit oder implizit vorkommen, die Anfangsglieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$ schreibt. Ferner erhält man

7) $\delta V = \delta_1 V + \partial V_{(a)} \cdot \delta a + \partial V_{(b)} \cdot \delta b$,

wo $\delta_1 V$ das Resultat des Differenziirens von $V_{(x)}$ nach dem x außerhalb, das übrige aber das Resultat des Differenziirens der Funktion $V_{(x)}$ nach dem x ist, das in den Koeffizienten von V_x, nämlich in $\delta_1^0 V$ (oder V, nach 1.), $\delta_1 V$ ꝛc. steckt, während δV das Resultat des Differenziirens von $V_{(x)}$ nach allem x bedeutet.

Denkt man sich nun von (7.) links und rechts noch einmal die Ableitungen nach allem x genommen, so erhält man

a) $\delta^2 V = \delta(\delta_1 V) + \delta(\partial V_{(a)} \cdot \delta a) + \delta(\partial V_{(b)} \cdot \delta b)$.

Setzt man aber in (7.) statt V jetzt $\delta_1 V$, so erhält man

b) $\delta(\delta_1 V) = \delta_1^2 V + \partial(\delta_1 V)_{(a)} \cdot \delta a + \partial(\delta_1 V)_{(b)} \cdot \delta b$.

Ferner hat man

c) $\delta(\partial V_{(a)} \cdot \delta a) = \delta(\partial V_{(a)}) \cdot \delta a + \partial V_{(a)} \cdot \delta^2 a$,

so wie wiederum, wenn man in (7.) $\partial V_{(a)}$ statt V setzt,

d) $\delta(\partial V_{(a)}) = \delta_1(\partial V_{(a)}) + \partial^2 V_{(a)} \cdot \delta a + \partial^{1,1} V_{(a,b)} \cdot \delta b$;

während nach (§. 244.)

e) $\delta_1(\partial V_{(a)}) = \partial(\delta_1 V)_{(a)}$ ist.

Aehnliches gilt für $\delta(\partial V_{(b)})$. Setzt man aber diese Werthe gehörig in einander, so erhält man zuletzt aus (a.)

8) $\delta^2 V = \delta_1^2 V + 2\partial(\delta_1 V)_{(a)} \cdot \delta a + 2\partial(\delta_1 V)_{(b)} \cdot \delta b +$
$+ \partial^2 V_{(a)} \cdot \delta a^2 + 2\partial^{1,1} V_{(a,b)} \cdot \delta a \cdot \delta b + \partial_2^2 V_{(b)} \cdot \delta b^2 +$
$+ \partial V_{(a)} \cdot \delta^2 a + \partial V_{(b)} \cdot \delta^2 b$,

so daß man $\delta^2 V$ aus den schon bekannten $\delta_1^0 V$ oder V, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ ꝛc. hergeholt erblickt.

Auf demselben Wege kann man nun aus $\delta^2 V$ in (8.) wiederum $\delta^3 V$, und daraus wiederum $\delta^4 V$ u. s. w. f. entwickeln, immer in die schon bekannten $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, $\delta_1^3 V$ ꝛc. ausgedrückt. Nur darf man nicht übersehen, daß in den in (6. 7. 8. u. s. f.) gefundenen Resultaten zur Rechten statt der in $\delta_1^0 V$

oder V, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, $\delta_1^3 V$ ꝛc. vorkommenden Buchstaben x, $y \cdots$ die ersten Glieder $\delta^0 x$, $\delta^0 y$ ꝛc. der für x, y ꝛc. gesetzten Reihen, dann aber für jedes a und b, welches explizit oder implizit vorkommt, noch die ersten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$ der für a und b gesetzten Reihen subſtituirt werden müſſen.

Endlich reicht das Vorſtehende aus, um auch in dem Falle $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$ ꝛc. finden zu können, wenn $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ ꝛc. Funktionen von einem einzigen ſolchen Buchſtaben a, oder von mehr als zweien derſelben, nämlich a, b, c ꝛc. ſind, und ſtatt letzterer wiederum unendliche Reihen geſetzt werden, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen.

Zweite Auflöſung.

Das Verfahren der erſten Auflöſung lehrt die Koeffizienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc. aus einander auf einem Wege finden, welcher genau genommen nichts weiter, als ein fortgeſetztes Differenziiren nach allem $\varkappa$ iſt. Will man jedoch ein, mit dem bisher beobachteten Verfahren nicht ganz analoges betreten; ſo kann man die Koeffizienten der Reihe

$$5)\ \delta^0 V + \delta V \cdot \varkappa + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots \quad \text{oder} \quad V_{(\varkappa)}$$

aus denen der Reihe

$$4)\ \delta_1^0 V + \delta_1 V \cdot \varkappa + \delta_1^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta_1^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots \quad \text{oder} \quad V_\varkappa$$

auch dadurch direkt und leichter finden, daß man ſich in den letztern, nämlich in $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, $\delta_1^3 V$ ꝛc. die Reihen $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ ſtatt aller a und b geſetzt, und was daraus wird, in Reihen entwickelt denkt, welche ebenfalls nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen, zuletzt aber das Endreſultat nach Potenzen von $\varkappa$ ordnet.

Weil jedoch, um den beſondern Fall der vorigen Auflöſung wieder feſt zu halten, $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ ꝛc. Funktionen von a und b ſind, (welche a und b ſowohl explizit als auch implizit in $\delta^0 x$ $\delta^0 y$, δx, δy ꝛc. enthalten ſind); ſo folgt, daß wenn in dieſen $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, und allgemein in $\delta_1^a V$ die Reihen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ſtatt a, b

gesetzt werden, diese Ausdrücke $\delta_1^a V$ selber wieder in Reihen übergehen, welche man durch

$$\delta_2^0(\delta_1^a V) + \delta_2(\delta_1^a V)\cdot x + \delta_2^2(\delta_1^a V)\cdot\frac{x^2}{2!} + \delta_2^3(\delta_1^a V)\cdot\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

bezeichnen, und deren einzelne Koeffizienten man nach (§. 246.) finden kann, wenn man nur die dortigen δ in die jetzigen δ_2 umwandelt, welche hier absichtlich durch die unten angehängte 2 von den δ_1 und δ, die außerdem hier schon vorkommen, unterschieden worden sind, und unterschieden werden mußten. — Man kann nun die Auflösung ganz allgemein geben. Schreibt man nämlich die (4.) so:

$$4)\quad V_x = S\left[\delta_1^a V\cdot\frac{x^a}{a!}\right],$$

und denkt man sich nun in $\delta_1^a V$ die Reihen a_x, b_x statt a, b gesetzt; so erhält man aus (4.) sogleich

$$6)\quad V_{(x)} = S\left[\delta_2^b(\delta_1^a V)\cdot\frac{x^b}{b!}\cdot\frac{x^a}{a!}\right],$$

oder, wenn man c durch die Gleichung $a+b=c$ einführt, und daran denkt, daß dann

$$\frac{c!}{a!\,b!} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} = (a+b)_b = (a+b)_a = c_b = c_a \text{ ist,}$$

wo c_a, c_b Binomial-Koeffizienten vorstellen,

$$7)\quad V_{(x)} = S\left[c_b\cdot\delta_2^b(\delta_1^a V)\cdot\frac{x^c}{c!}\right]_{a+b=c}.$$

Vergleicht man dieses mit der Reihe (5.), nämlich mit

$$5)\quad V_{(x)} = S\left[\delta^c V\cdot\frac{x^c}{c!}\right],$$

so erhält man, für $c = n$

$$8)\quad \delta^n V = S\left[n_b\cdot\delta_2^b(\delta_1^a V)\right]_{a+b=n},$$

wo n_b die Reihe der Binomial-Koeffizienten vorstellt.

Daraus geht aber für $n = 0, 1, 2, 3$ ꝛc. sogleich hervor

$$\delta^0 V = \delta_2^0(\delta_1^0 V) = \delta_1^0 V = V,$$

$$\delta V = \delta_2^0(\delta_1 V) + \delta_2(\delta_1^0 V) = \delta_1 V + \delta_2(\delta_1^0 V)$$

$$\delta^2 V = \delta_2^0(\delta_1^2 V) + 2\cdot\delta_2(\delta_1 V) + \delta_2^2(\delta_1^0 V)$$

u. s. w. f.,

und diese Resultate stimmen genau mit denen (6. 7. 8. ꝛc.) in der ersten Auflösung gefundenen überein, sobald man nur die δ_2 nach (§. 246.) noch auswerthet.

Anmerkung. In dem besondern Falle, daß die für a und b zu setzenden unendlichen Reihen sich bloß auf ihre zwei ersten Glieder reduziren, nämlich auf $\delta^0 a + \delta a\cdot x$ und $\delta^0 b + \delta b\cdot x$, läßt sich die Reihe, in welche dadurch $\delta_1^a V$ übergeht, nach dem Taylor'schen Lehrsatz für zwei Veränderliche (III. Th. d. S. §§. 29. 32.) finden; sie ist nämlich dann

$$= S\left[\frac{(d+e)!}{d!\,e!}\partial^{d,e}(\delta_1^a V)_{(a,b)}\cdot\delta a^d\cdot\delta b^e\cdot\frac{x^f}{f!}\right],$$
$$d+e=f$$

wenn nur rechts unter a und b die ersten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$ der Ausdrücke a_x, b_x verstanden werden. Nimmt man hiervon den Koeffizienten von $\frac{x^b}{b!}$ (indem man b statt f setzt); so hat man für diesen besondern Fall $\delta_2^b(\delta_1^a V)$, und setzt man diesen Werth in das vorhin gefundene Resultat (8.), so erhält man jetzt, weil $n_b = \frac{n^{\underline{b}-1}}{b!}$ ist,

$$\delta^n V = S\left[\frac{n^{\underline{b}-1}}{d!\,e!}\cdot\partial^{d,e}(\delta_1^a V)_{(a,b)}\cdot\delta a^d\cdot\delta b^e\right],$$
$$d+e=b,\quad a+b=n$$

oder

$$\delta^n V = n!\ S\left[\frac{\partial^{d,e}(\delta_1^a V)_{(a,b)}\cdot\delta a^d\cdot\delta b^e}{a!\,d!\,e!}\right],$$
$$a+d+e=n$$

wo man nur nicht vergessen muß, daß in diesem Resultat zur Rechten überall unter a und b (sowohl da, wo es explizit, als auch da, wo es implizit in $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, δx, δy ꝛc. erscheint) allemal die ersten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$ der für a und b gesetzten a_x, b_x gedacht werden müssen.

§. 257. Zusatz.

Von dieser im vorhergehenden (§. 256.) behandelten Aufgabe verdient noch für die Anwendungen der besondere Fall hervorgehoben zu werden, wenn nämlich, (nachdem x, y, z ꝛc. in $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ ꝛc. und dadurch V in $V_\varkappa$ oder in

$$\delta_1^0 V + \delta_1 V \cdot \varkappa + \delta_1^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

übergegangen sind) diese $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, $\delta^0 z$, δx, δy, δz, $\delta^2 x$ ꝛc. bloß noch als Funktionen des einzigen a angesehen werden, der übrigens in V, demnach auch in $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ ꝛc. noch explizit vorkommen mag (oder nicht), und wo endlich bloß für jedes solche a allein die Reihe $a_\varkappa$ d. h.

$$\delta^0 a + \delta a \cdot \varkappa + \delta^2 a \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

gesetzt wird.

In diesem Falle nämlich hat man

I. $\delta^0 V = \delta_1^0 V = V_{a,x,y,z\ldots}$,

wenn unter $x,y,z\cdots$ die Anfangsglieder $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, $\delta^0 z$ ꝛc. und überall unter a (sowohl da, wo es explizit, als auch da, wo es implizit vorkommt in $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, $\delta^0 z$ ...) das Anfangsglied $\delta^0 a$ verstanden wird.

Ferner hat man in diesem besondern Falle noch

II. $\delta V = \delta_1 V + \partial V_{(a)} \cdot \delta a$ und $\delta_1 V = \delta V - \partial V_{(a)} \cdot \delta a$,

III. $\delta^2 V = \delta_1^2 V + 2 \cdot \partial(\delta_1 V)_{(a)} \cdot \delta a + \partial^2 V_{(a)} \cdot \delta a^2 + \partial V_{(a)} \cdot \delta^2 a$

u. s. w. f., wenn man nur nicht unterläßt, in diesen Resultaten zur Rechten, wo x, y, z ꝛc. erscheint, sich $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, $\delta^0 z$ ꝛc. darunter zu denken, dann aber auch für jedes a, welches sowohl explizit als auch (in diesen $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, $\delta^0 z$ ꝛc. dann aber auch in δx, δy, δz, $\delta^2 x$ ꝛc.) implizit vorkommt, jedesmal das Anfangsglied $\delta^0 a$ zu schreiben, oder doch geschrieben sich zu denken.

Anmerkung. Wer diese Untersuchungen auf noch mehr einzelne Beispiele anwenden will, dem empfehlen wir noch das Studium der „Lehre vom Größten und Kleinsten" Berlin 1825. Man wird dann bemerken, daß in jener Lehre nur die wenigen

hier dargelegten Prinzipien dieser allgemeinen Entwicklungsmethode in Anwendung kommen. Aber auch mehrere der hier nun folgenden Kapitel werden Anwendungen dieser allgemeinen Methode enthalten, namentlich zunächst auf die Integration.

§. 258. Zusatz.

Die hohe Wichtigkeit dieser ganz allgemeinen, alle Aufgaben umfassenden Methode, für die Entwicklung in unendliche Reihen, wird aber besonders noch dadurch gesteigert, daß diese Reihen V_x für V bloß durch den Maclaurin'schen Lehrsatz sich ergeben, daß demnach der Satz (§. 240.), welcher, wo man auch die Reihe abbrechen mag, allemal sogleich die Grenzen liefert, zwischen denen die Summe aller (unendlich vielen) übrigen Glieder der Reihe liegen muß, — hier im weitesten Umfange seine Anwendung findet; — so daß man mittelst dieser Methode die Grenze findet, zwischen denen der Rest aller (z. B. der durch Umkehrung oder auf sonst irgend eine Art) erhaltenen, nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihen liegen muß.

Und bedenkt man noch, daß in den Ziffernrechnungen, so wie in der Anwendung der unendlichen Reihen zu Schlüssen, diese Grenzen, zwischen denen der Rest der Reihe liegen kann, durchaus bekannt seyn müssen, so sieht man alle andern bekannten Methoden, gegen die hier so eben vorgetragene um so weiter zurücktreten *).

§. 259. Zusatz.

Und um der Anwendung dieser Methode die größeste Leichtigkeit zu verschaffen, hat man sich nur noch mit folgender Frage zu beschäftigen.

---

*) Auch muß der Vfr. noch bemerken, daß in dieser allgemeinen Entwicklungsmethode alle dem Vfr. bekannten übrigen Methoden enthalten sind, namentlich auch der **Calcul des dérivations** des Arbogast, so wie noch (was die nächste Abtheilung dieses Kapitels in'sbesondere nachweist) der **Calcul des Variations**, wie solcher von Lagrange und Euler behandelt worden ist.

Wenn V eine Funktion einer oder mehrerer und beliebig vieler Veränderlichen a, b, c ꝛc. ist, ein mechanisches Verfahren ausfindig zu machen, um das ate Differenzial (d. h. das 1ste, 2te, 3te ꝛc.) von V, unter der Voraussetzung, daß a, b, c ꝛc. selbst wieder veränderlich sind, ohne weitere besondere Mühe mit Leichtigkeit und mit Sicherheit mechanisch hinschreiben zu können.

Mit der Beantwortung solcher Fragen, welche eine Erleichterung des Mechanischen (der Technik) im Hinschreiben der gesuchten Ausdrücke zum Gegenstand haben, beschäftigt sich aber die kombinatorische Analysis, von welcher wir im (II. Th. d. S. 2te Ausgabe) die Grundlage gegeben haben. Das Feld unsers vorliegenden Systems ist zu groß, als daß wir uns hier tiefer auf dergleichen Einzelnheiten einlassen könnten.

Anmerkung. Hat man Lust am Umkehren der Untersuchungen, so kann man die Entwicklung von V_{a_x, b_x, c_x} ꝛc. in Reihen nach x zuerst direkt vornehmen, mit Zuziehung kombinatorischer Hilfsmittel; dann aber das Resultat mit dem unsrigen

$$\delta^0 V + \delta V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

vergleichen, und dadurch den Ausdruck für $\delta^n V$ direkt erhalten, folglich dann auch das Gesetz, nach welchem sich die einzelnen Theile von $d^n(V_{a,b,c\ldots})$ richten, (unter der Voraussetzung, daß a, b, c ꝛc. selbst wieder veränderlich sind), durch kombinatorische Evolutionen ausgedrückt.

Weil es aber bei der Aufsuchung solcher Gesetze in der Praxis meist bloß darauf ankommt, die Ziffernkoeffizienten der einzelnen Theile, [hier von $\partial^n(V_{a,b,c\ldots})$], gehörig zu haben; so wird man diesen Zweck auch erreichen, wenn man statt der beliebigen Funktion V von a_x, b_x, c_x ꝛc. bloß eine gewählte, bestimmte Funktion dieser Reihen setzt, solche direkt in Reihen nach x entwickelt, und dann mit unsrer obigen Reihe

$$\delta^0 V + \delta V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

vergleicht, dabei aber die allgemeinen Formen respek-

tirt. — Da jedoch jedes solches Eingehen in das Einzelne dem Zwecke unseres Systems entgegen ist, so müssen wir uns hier, so wie früher schon und in der Folge noch oft, mit bloßen Andeutungen begnügen, deren gelegentliche weitere Ausführung entweder uns oder andern vorbehalten bleiben mag.

Zweite Abtheilung.

Variationsrechnung.

§. 260. Erklärung.

In manchen Fällen der Anwendung der so eben mitgetheilten Lehren, sind die Reihen a_x, b_x, V_x ꝛc. von ihren ersten Gliedern $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 V$ ꝛc. wenig verschieden, in so fern x sehr klein, ja oft im Moment des Verschwindens gedacht ist. In dem letztern Falle, und wo x im Moment des Verschwindens gedacht ist, nennt man die einzelnen Glieder des Unterschiedes $a_x - a_0$, $b_x - b_0$, $V_x - V_0$ ꝛc., die allemal mit den verschiedenen Potenzen von x affizirt sind, so daß jedes folgende gegen das vorhergehende selbst wieder in den Moment des Verschwindens rückt, (besonders wenn die ersten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 V$ ꝛc. dieser für a, b, V zu setzenden Reihen, selber wieder dieselben a, b, V ꝛc. sind, so daß a_x, b_x, V_x ꝛc. Werthe sind, welche den Werthen a, b, V ꝛc. selbst nächst anliegen) die Variationen von a, b, V ꝛc., und es enthält daher die vorhergehende Abtheilung zugleich die sogenannte Variations-Rechnung (Calcul des Variations), ihrem Wesen nach. — Weil sich aber das in der ersten Abtheilung vorgetragene zu der (geschichtlichen) Variationsrechnung ungefähr eben so verhält, wie die früher von uns mitgetheilte Ableitungsrechnung zu der Differenzialrechnung; so wollen wir, ganz analog dem im (III. Th. d. S.) beobachteten Verfahren, auch noch einige Worte über

diese besondere geschichtliche Form (wenn auch sie selbst durch das Vorhergeschickte bereits überflüssig gemacht ist) hier hinzufügen.

So wie nämlich (§. 19. d. III. Th. d. S.) nachgewiesen werden mußte, daß der Begriff des Differenzials dy doppelsinnig ist, und einmal den gesammten Zuwachs

$$y_{x+h} - y_x \quad \text{d. h.} \quad \partial y_x \cdot h + \partial^2 y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots \text{ in inf.},$$

ein andermal aber nur das erste Glied $\partial y_x \cdot h$ dieses Gesammtzuwachses ist, (unter der Voraussetzung, daß h im Moment des Verschwindens gedacht wird); eben so findet man bei dem Studium der Geschichte der Variationsrechnung, daß der Begriff der Variation δa *) doppelsinnig ist, und bald den ganzen Zuwachs

$$a_\varkappa - \delta^0 a \quad \text{d. h.} \quad \delta a \cdot \varkappa + \delta^2 a \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$$

bedeutet (in welchem δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$ ... entweder ganz beliebig unabhängige, oder von andern noch abhängige Koeffizienten sind, während $\varkappa$ im Moment des Verschwindens gedacht ist), bald aber auch von diesem Zuwachs nur das erste Glied $\delta a \cdot \varkappa$.

§. 261. Zusatz.

Wenn wir aber den Doppelsinn des Differenzials im (III. Th. d. S.) während des Vortrages aufrecht erhalten mußten, um eben die Leibnitz'sche Differenzialrechnung zu haben, welche in die Anwendungen auf eine ihr eigenthümliche Weise eingegriffen hat, und daher geschichtlich nicht unwichtig ist; so haben wir doch hier durchaus jenen Grund nicht, auch der Variation eine doppelte Bedeutung zu lassen, und wir werden daher hier folgenden völlig bestimmten Begriff der Variation geben.

---

*) So wie wir zwei (∂ oder d) von einander unterschieden haben, um Funktionen ∂y, von unendlich kleinen Zuwachsen dy, zu unterscheiden, so gebrauchen wir auch hier zwei (δ oder δ), um beliebige oder abhängige endliche Koeffizienten δa, δV ꝛc. von unendlich kleinen Aenderungen δa, δV ꝛc. jedesmal genau und bestimmt zu unterscheiden.

Verwandelt sich nämlich a oder b oder V in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe (entweder freiwillig oder abhängig), welche beziehlich durch a_x, b_x, V_x bezeichnet, und jedesmal nach (§. 242. und §. 243.) in der Form

$$\delta^0 a + \delta a \cdot x + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\delta^0 b + \delta b \cdot x + \delta^2 b \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 b \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\delta^0 V + \delta V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

geschrieben wird; so nennt man in diesen Reihen, so oft x im Moment des Verschwindens gedacht wird (und vorzüglich, wenn die ersten Glieder dieser Reihen, nämlich $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 V$ ꝛc. von a, b, V nicht verschieden seyn sollen), das Produkt

$$\delta^a a \cdot x^a, \quad \delta^a b \cdot x^a, \quad \delta^a V \cdot x^a \text{ ꝛc.}$$

die ate Variation, beziehlich von

$$a, \quad b, \quad V \text{ ꝛc.},$$

und man kann solche beziehlich durch

$$\delta^a a, \quad \delta^a b, \quad \delta^a V \text{ ꝛc.}$$

vorstellig machen; und der Unterschied

$$a_x - a \text{ oder } b_x - b \text{ oder } V_x - V$$

kann dann die Gesammt-Variation oder Total-Variation heißen.

§. 262. Zusatz.

Aus dieser Definition folgt sogleich:

I. $\delta^a V \cdot x^a = \delta^a V$,

also auch 1) $\delta V \cdot x = \delta V$,

2) $\delta^2 V \cdot x^2 = \delta^2 V$,

3) $\delta^3 V \cdot x^3 = \delta^3 V$,

u. s. w. f.

II. $$V_x = V + \delta V + \frac{1}{2!} \cdot \delta^2 V + \frac{1}{3!} \cdot \delta^3 V + \cdots$$

$$a_x = a + \delta a + \frac{1}{2!} \cdot \delta^2 a + \frac{1}{3!} \cdot \delta^3 a + \cdots$$

u. s. w. f.

$$\text{III. } \delta^a \frac{d^n V}{dx^n} = \frac{d^n(\delta^a V)}{dx^n}$$

$$\delta^a \int V \cdot dx = \int \delta^a V \cdot dx$$

$$\delta^a \frac{d^{m+n} V}{dx^m \cdot dy^n} = \frac{d^{m+n}(\delta^a V)}{dx^m \cdot dy^n}$$

u. s. w.;

alles aus (§. 244.) in Verbindung mit der hiesigen Formel (I.), und weil der Faktor x^a bei dem Integriren und Differenziiren nach x oder y ꝛc. konstant ist, deßwegen jedesmal sogleich als Faktor wieder herausgesetzt werden kann.

§. 263. Zusatz.

Und multiplizirt man die Gleichungen in den Auflösungen der Aufgabe der (§§. 245—257.) beziehlich mit x, x^2, x^3 ꝛc., so gehen jene Gleichungen zwischen den δ sogleich in andere über (nach §. 262. I.), welche genau dieselben sind, nur δ statt δ geschrieben.

Jene praktische Regel, die Koeffizienten δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc. in jeder einzelnen Aufgabe zu finden, gilt daher unverändert für die Auffindung der Variationen δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ ꝛc., d. h. die ate Variation $\delta^a V$ wird gefunden, wenn man V a mal hinter einander nach allen den Elementen, für welche solche unendliche, nach x fortlaufende Reihen (freiwillig oder gezwungen) gesetzt worden sind, diese Elemente selbst als veränderlich ansehend, differenziirt, in den Endresultaten aber die Variationszeichen δ statt derjenigen Differenzialzeichen schreibt, welche die Elemente selbst affiziren.

Beispiel. Ist z. B. U eine Funktion von x, y_x, z_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ∂z_x, $\partial^2 z_x$, $\partial^3 z_x$, und $V = \int_{b \div a} U \cdot dx$, und denkt man sich nun y in die unendliche Reihe y_x oder $y + \delta y + \frac{1}{2!} \cdot \delta^2 y +$ ꝛc., und eben so z in die unendliche Reihe $z + \delta z + \frac{1}{2!} \cdot \delta^2 z + \cdots$ übergehend, so wie dadurch V in die unendliche Reihe $V + \delta V + \frac{1}{2!} \cdot \delta^2 V + \cdots$, und soll nun die

Variation δV in die andern Variationen δy, δz ausgedrückt werden: so hat man

$$\text{I.}\quad \delta V = \int_{b\div a} \delta U \cdot dx,$$

und (wenn man beziehlich durch

$$\partial y,\ \partial^2 y,\ \partial z,\ \partial^2 z,\ \partial^3 z$$
$$y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2,\ z_3$$

vorstellt) wiederum

$$\text{II.}\quad \delta U = \frac{dU}{dy}\cdot\delta y + \frac{dU}{dy_1}\cdot\delta y_1 + \frac{dU}{dy_2}\cdot\delta y_2 + \frac{dU}{dz}\cdot\delta z + \frac{dU}{dz_1}\cdot\delta z_1 + \frac{dU}{dz_2}\cdot\delta z_2 + \frac{dU}{dz_3}\cdot\delta z_3,$$

während

$$\delta y_1 = \delta\partial y = \partial\delta y, \quad \delta y_2 = \delta\partial^2 y = \partial^2\delta y, \text{ u. s. w.}$$
$$\delta z_1 = \delta\partial z = \partial\delta z, \quad \delta z_2 = \delta\partial^2 z = \partial^2\delta z, \text{ u. s. w.}$$

ist; so daß, wenn man überhaupt Ableitungszeichen statt der Differenzialzeichen schreibt,

$$\text{III.}\quad \delta V = \int_{b\div a} \left\{ \begin{array}{l} \partial U_y\cdot\delta y + \partial U_{y_1}\cdot\partial\delta y + \partial U_{y_2}\cdot\partial^2\delta y + \\ + \partial U_z\cdot\delta z + \partial U_{z_1}\cdot\partial\delta z + \partial U_{z_2}\cdot\partial^2\delta z + \partial U_{z_3}\cdot\partial^3\delta z \end{array} \right\}\cdot dx$$

wird, wobei man nicht vergessen muß, daß das Zeichen $\int\varphi\cdot dx$ allemal das Integral nach allem x bedeutet, was in φ explizit oder implizit steckt. Dabei ist noch zu beachten, daß die Variationen von y und von z als gegeben angesehen werden, so daß die Gleichung (III.) nur die Abhängigkeit der Variation δV von den vorher genannten Variationen ausdrückt.

Es versteht sich dabei von selbst, daß der so eben für δV erhaltene Ausdruck noch auf mannigfache Art umgeformt werden kann, sobald irgend ein praktisches Bedürfniß eine andere bestimmte Form wünschenswerth oder nothwendig macht. So z. B. könnte man alle die einzelnen Glieder in (III.) zur Rechten, welche noch mit den Ableitungen $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, $\partial\delta z$, $\partial^2\delta z$, $\partial^3\delta z$ behaftet sind, theilweise integriren, die Formeln (§§. 225—228.) anwendend, und dann würde man sogleich umgeformt erhalten

$$\text{IV.}\quad \delta V = \int_{b\div a} \left[\partial U_y - \partial(\partial U_{y_1}) + \partial^2(\partial U_{y_2})\right]\cdot\delta y\cdot dx + \int_{b\div a} \left[\partial U_z - \partial(\partial U_{z_1}) + \partial^2(\partial U_{z_2}) - \partial^3(\partial U_{z_3})\right]\cdot\delta z\cdot dx + \left[\begin{array}{l} \left[\partial U_{y_1} - \partial(\partial U_{y_2})\right]\cdot\delta y + \partial U_{y_2}\cdot\partial\delta y \\ + \left[\partial U_{z_1} - \partial(\partial U_{z_2}) + \partial^2(\partial U_{z_3})\right]\cdot\delta z \\ + \left[\partial U_{z_2} - \partial(\partial U_{z_3})\right]\cdot\partial\delta z + \partial U_{z_3}\cdot\partial^2\delta z \end{array}\right]_{b\div a}$$

Solche Umformungen erscheinen aber als müßig, so lange sie durch keine praktische Anwendung motivirt werden.

§. 264. Zusatz.

Nachdem wir aber den Begriff der (unendlich kleinen) Variationen gegeben, und zugleich gezeigt haben, wie solche, wenn sie von anderen abhängig sind, in letztere ausgedrückt gefunden werden können; so müssen wir noch hinzufügen, daß es in allen praktischen Anwendungen evidenter und bequemer ist, die Variationen von a oder V durch $x \cdot \delta a$, $x^2 \cdot \delta^2 a$ ꝛc., $x \cdot \delta V$, $x^2 \cdot \delta^2 V$ ꝛc. (statt bloß durch δa, $\delta^2 a$ ꝛc., δV, $\delta^2 V$ ꝛc.) auszudrücken, so daß δa, $\delta^2 a$ ꝛc., δV, $\delta^2 V$ ꝛc. endliche Ausdrücke bleiben, während bloß x im Moment des Verschwindens gedacht wird. Natürlich muß aber dann auch der Kalkul angewandt werden, welcher in der ersten Abtheilung dieses Kapitels gelehrt worden ist, während der in dieser zweiten Abtheilung gelehrte ganz ignorirt oder in jenem Sinne gedacht wird. Die δa, $\delta^2 a$ ꝛc. δV, $\delta^2 V$ ꝛc. kann man dann die Variationskoeffizienten nennen, während noch immer

$$a_x - \delta^0 a \quad \text{d. h.} \quad \delta a \cdot x + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$V_{(x)} - \delta^0 V \quad \text{d. h.} \quad \delta V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

die Gesammt-Variationen oder Total-Variationen genannt werden können.

Deshalb wollen wir künftighin jene, in der ersten Abtheilung dieses Kapitels bereits gelehrte allgemeine Entwicklungsmethode ebenfalls schon Variationsrechnung nennen, gerade aus demselben Grunde, aus welchem wir uns hier häufig des Wortes differenziiren bedienen, wenn wir das Geschäft des Ableitens (der Auffindung der Ableitungen) ausdrücken wollen.

Höhere Zahlenlehre.

Zwölftes Kapitel.

Von den Differenzial- oder Ableitungs-Gleichungen mit einem unabhängigen Veränderlichen. Integration derselben. Betrachtung ihrer singulären Werthe.

Vorerinnerung.

In den Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung stößt man auf folgende Aufgaben:

A) Es ist gegeben

1) $\partial y_x = \psi_x$ oder $dy = \psi \cdot dx$,

man soll alle Funktionen y von x finden, welche dieser Gleichung (I.) genügen. — Diese Aufgabe war Gegenstand des 6ten, 7ten und 8ten Kapitels (des vorhergehenden IV. Th. d. S.), und man hat gefunden, daß wenn φ_x eine solche Funktion y ist, der Ausdruck $\varphi_x + C$ alle diese gesuchten Funktionen y in sich schließe.

B) Es ist gegeben

2) $\partial^n y_x = \psi_x$ oder $d^n y = \psi_x \cdot dx^n$,

man soll alle Funktionen y von x finden, welche dieser Gleichung (2.) entsprechen. —

Man hat offenbar, und findet nach und nach

$\partial^{n-1} y_x = \int \partial^n y_x \cdot dx$, $\partial^{n-2} y_x = \int \partial^{n-1} y_x \cdot dx$,

$\partial^{n-3} y_x = \int \partial^{n-2} y_x \cdot dx$, u. s. f., zuletzt

$\partial^2 y_x = \int \partial^3 y_x \cdot dx$, $\partial y_x = \int \partial^2 y \cdot dx$ und $y_x = \int \partial y \cdot dx$,

während jedes Integral allgemein genommen werden muß, so daß durch die n mal wiederholte Integration eben so viele willkührliche (von x unabhängige) Konstanten eingehen.

C) Es ist gegeben

3) $\partial^{m,n}u_{x,y} = \psi_{x,y}$ oder $\frac{d^{m+n}u}{dx^m \cdot dy^n} = \psi$,

4) $\partial^{m,n,l}u_{x,y,z} = \psi_{x,y,z}$ oder $\frac{d^{m+n+l}u}{dx^m \cdot dy^n \cdot dz^l} = \psi$,

u. s. w. f.,

man soll alle Funktionen u von x und y, oder von x, y, z, finden, welche der Gleichung (3) oder (4.) genügen.

Mit diesen Aufgaben (B. und C.) hat sich aber die erste Abtheilung des 10ten Kapitels beschäftigt, während die 2te Abtheilung desselben sich der dortigen Begriffe und Lehren bediente, um den Taylor'schen und Maclaurin'schen Lehrsatz in eine endliche Reihe von Gliedern umzuformen, und dadurch Grenzen zu bestimmen, zwischen denen dann die Ziffernwerthe jener unendlichen Reihen liegen.

In allen 3 Aufgaben (A. B. C.) ist es dabei einerlei, ob die Ableitungen ∂y_x, $\partial^n y_x$, $\partial^{m,n}u_{x,y}$ ꝛc. (wie hier oben angenommen ist) in entwickelter Gestalt gegeben sind, oder ob man Gleichungen hat, welche erst nach den unbekannten ∂y_x, $\partial^n y_x$, $\partial^{m,n}u_{x,y}$ ꝛc. algebraisch aufgelöst werden müssen, um die Gleichungen in der obigen entwickelten Form zu erhalten, so lange man nur, wie dies allemal geschieht, die allgemeine algebraische Auflösung dieser Gleichungen als möglich voraussetzt. — Dagegen ist es eine neue Aufgabe

D) wenn man zwischen ∂y_x, x und y_x selbst, oder zwischen $\partial^n y_x$ und $x, y_x, \partial y_x \cdots \partial^{n-1} y_x$ eine Gleichung

5) $\psi_{x,y,\partial y} = 0$

oder 6) $\psi_{x,y,\partial y,\partial^2 y \cdots \partial^n y} = 0$

gegeben hat, und nun alle Funktionen y von x gesucht werden, welche diesen Gleichungen entsprechen. Von dieser Aufgabe sind die ersten beiden (A. und B.) bloß spezielle Fälle, und ihre Betrachtung macht den Gegenstand des gegenwärtigen 12ten Kapitels in seiner ersten Abtheilung aus. In der zweiten Abtheilung desselben kommt dann die Aufgabe in Anregung,

E) wo zur Bestimmung zweier Funktionen y und z von x, zwei Gleichungen

7) $\varphi_{x,y,\partial y,\partial^2 y \cdots z,\partial z,\partial^2 z \cdots} = 0$ und 8) $\psi_{x,y,\partial y \cdots z,\partial z,\partial^2 z \cdots} = 0$

oder, wo zur Bestimmung dreier Funktionen y, z, u von x, drei solche Gleichungen (in denen auch Ableitungen von u nach x bis zu einer beliebigen Ordnung vorkommen können und im Allgemeinen vorkommen werden), oder wo zur Bestimmung von m Funktionen y_x, z_x, u_x, v_x ꝛc. m solche Gleichungen zwischen x und y, z, u, v ꝛc. und den Ableitungen der m Veränderlichen y, z, u, v ꝛc. nach x, von jeder bis zu einer beliebigen Ordnung hin, gegeben sind.

Und alle die bis hieher betrachteten Gleichungen heißen Differenzial- oder Ableitungsgleichungen mit einem unabhängigen Veränderlichen.

Nach diesem können aber auch

F) alle Funktionen u zweier oder mehrerer Veränderlichen x, y ꝛc. gesucht werden, welche einer gegebenen Gleichung (zwischen x, y, u, ∂u_x, ∂u_y, $\partial^2 u_x$, $\partial^2 u_y$, $\partial^{1,1} u_{x,y}$, $\partial^3 u_x$, $\partial^{2,1} u_{x,y}$, $\partial^{1,2} u_{x,y}$, $\partial^3 u_y$ *), u. s. w) genügen, d. h. einer Gleichung zwischen den unabhängigen Veränderlichen x, y ꝛc. dann der gesuchten Funktion u selbst und ihren Parzial-Ableitungen (oder Parzial-Differenzialien).

G) Auch können zur Bestimmung von m solchen Funktionen $u_{x,y\ldots}$, $v_{x,y\ldots}$, $w_{x,y\ldots}$ ꝛc. m solche Parzial-Gleichungen gegeben seyn (zwischen den unabhängigen Veränderlichen x, y ꝛc., den m gesuchten Funktionen u, v, w ꝛc. und deren Parzial-Ableitungen nach x, nach y ꝛc. bis zu irgend einer Ordnung hin) — Diese Aufgaben (F. und G.) sollen in den nächsten beiden (dem 13ten und 14ten) Kapiteln, so viel als es möglich ist, in Erwägung gezogen werden, und bemerken wir hier nur noch vorläufig, daß wir diese letzterwähnten Gleichungen (in F. u. G.) Differenzial- oder Ableitungsgleichungen mit zweien oder mehreren unabhängigen Veränderlichen nennen könnten, daß sie aber gewöhnlich Parzial-Differenzialgleichungen oder schlechtweg Parzialgleichungen genannt werden.

---

*) Der Leser wird sich erinnern, daß

$\partial^{m,n} u_{x,y}$ identisch ist mit $\frac{d^{m+n} u}{dx^m \cdot dy^n}$,

also $\partial^{2,1} u_{x,y}$ identisch mit $\frac{d^3 u}{dx^2 \cdot dy}$

und $\partial^{1,2} u_{x,y}$ identisch mit $\frac{d^3 u}{dx \cdot dy^2}$.

Erste Abtheilung.

Von den Differenzial- oder Ableitungsgleichungen mit einem unabhängigen Veränderlichen und zwischen nur 2 Veränderlichen überhaupt (zur Bestimmung einer einzigen Funktion y von x).

A. α) Von den Integralien der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 265. Aufgabe.

Es ist eine Differenzial- oder Ableitungsgleichung der ersten Ordnung (zwischen x, y und ∂y_x, welches letztere durch y_1 vorgestellt seyn mag), nämlich die Gleichung $F_{x,y,y_1} = 0$, gegeben; man soll alle Funktionen y_x finden, welche statt y gesetzt (wo dann ∂y_x statt y_1 gesetzt werden muß) die Gleichung $F = 0$ identisch machen.

Betrachtung. In dem einfachsten Falle, wo aus F das y selbst herausgefallen, und wo also bloß eine Gleichung zwischen x und y_1 oder ∂y_x gegeben ist, welche, nach ∂y_x algebraisch aufgelöst, dieses ∂y_x als eine bloße Funktion von x, etwa $\partial y_x = \varphi_x$, also $y = \int \varphi \cdot dx$ liefert, ist diese Aufgabe im (IV. Th. d. S. §. 160.) mittelst des allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatzes bereits gelößt, und dieselbe Methode scheint man auch hier anwenden zu können. Es ist nämlich für jede Funktion y, also auch wenn y die hier gesuchte y_x vorstellt, nach dem allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatze

$$1)\quad y_x = [y_x]_\alpha + [\partial y_x]_\alpha \cdot \frac{x-\alpha}{1} + [\partial^2 y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + [\partial^3 y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots$$

Findet man nun aus der gegebenen Gleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ und aus ihren Ableitungsgleichungen $\partial F_{(x)} = 0$, $\partial^2 F_{(x)} = 0$, $\partial^3 F_{(x)} = 0$ ꝛc. sowohl ∂y_x als auch $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ ꝛc. alle in x und y ausgedrückt, so daß man etwa hat

$$2)\quad \partial y_x = \pi_1,\ \partial^2 y_x = \pi_2,\ \partial^3 y_x = \pi_3,\ \partial^4 y_x = \pi_4 \text{ ꝛc.},$$

während $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ ꝛc. so eben gefunden, also bekannte Zusammensetzungen aus x und y sind, ohne y_1, y_2 ꝛc. zu enthalten; so kann man diese Werthe statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ ꝛc. in (1.) substituiren, und man hat dann jedes y_x, welches der Gleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ genügt, offenbar in Form einer, nach ganzen Potenzen von $(x-\alpha)$ fortlaufenden Reihe ausgedrückt, welche nur noch das Unbequeme hat, daß zur Rechten, in jedem Gliede, $[y_x]_\alpha$ vorkommt, während $[y_x]_\alpha$ zwar nach x konstant, aber doch von dem gesuchten y_x abhängig ist. Bezeichnen wir nämlich $[y_x]_\alpha$ auf einen Augenblick durch C, so ist die Gleichung jetzt so:

$$3)\ y_x = C + [\pi_1]_{\alpha,C} \cdot \frac{x-\alpha}{1} + [\pi_2]_{\alpha,C} \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + [\pi_3]_{\alpha,C} \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots \text{ *)},$$

und es entsteht nun die Frage, ob man C ganz beliebig konstant nehmen dürfe, und ob dann doch noch die Reihe in (3.) zur Rechten, statt y gesetzt, der Gleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ genügen werde? **) Dieser Untersuchung sind wir in dem oben angeführten (§. 160. d. IV. Th. d. S.) dadurch ausgewichen, daß wir dort sogleich das mit $x = \alpha$ anfangende Integral $y_{x \div a}$ suchten, und vorher schon allgemeine Sätze hingestellt hatten, welche aus diesem besonderen Integral das allgemeine finden lehrten. Hier und in der Folge dagegen (bei ähnlichen Aufgaben) werden wir besser thun, die „Methode der unbestimmten Koeffizienten" eintreten zu lassen, d. h. die Reihe für y_x mit unbestimmten Koeffizienten anzunehmen, und dann die Koeffizienten so zu bestimmen, daß der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ wirklich genügt werde, ganz so, wie wir die Aufgabe des (§. 229.) in (A.) daselbst behandelt haben, nur

---

*) $[\pi_a]_{\alpha,C}$ soll hier das bedeuten, was aus π_a als Funktion von x und y wird, wenn α statt x und dann natürlich $[y_x]_\alpha$ oder C statt y gesetzt wird.

**) Diese Frage wird leicht bejahend beantwortet, wenn man die Reihe in (3.) zur Rechten nach x differenziirt, und dann diese Werthe, während C ganz willkührlich konstant bleibt, statt y_x und ∂y_x in die gegebene Differenzialgleichung $F = 0$ substituirt, wo man sich dann bald überzeugt, daß letztere Gleichung allemal identisch wird. Nichts desto weniger ist der jetzt im Text folgende Weg der Entwicklung vorzuziehen.

mit dem Unterschiede, daß wir hier (und in der Folge) zur Ausführung der Rechnung jedesmal die von uns unter dem Namen der Variations-Rechnung (S. das Ende des Kap. XI.) in der ersten Abtheilung des vorhergehenden Kapitels (XI.) vorgetragene allgemeine Entwicklungsmethode anwenden werden, wie nun folgt.

Auflösung.

I. Man gebe der für y gesuchten, nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufenden Reihe dadurch die Form

1) $y_\varkappa$ oder $\delta^0 y + \delta y \cdot \varkappa + \delta^2 y \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 y \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$,

daß man

2) $x - \alpha = \varkappa$, also $x = \alpha + \varkappa$

setzt, so sind $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. die gesuchten, noch unbestimmten Koeffizienten. Weil aber nun $x = \alpha + \varkappa$ selbst als eine Reihe

3) $x_\varkappa$ oder $\delta^0 x + \delta x \cdot \varkappa + \delta^2 x \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 x \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$

angesehen werden kann, so hat man, wenn letzteres geschieht

4) $\delta^0 x = \alpha$, $\delta x = 1$, $\delta^2 x = \delta^3 x = \delta^4 x = \text{ꝛc.} = 0$,

und diese Koeffizienten $\delta^0 x$, δx, $\delta^2 x$ ꝛc. sind also gegeben. Da ferner, so wie statt y die gesuchte Reihe $y_\varkappa$ gesetzt wird, auch statt y_1 oder ∂y_x sogleich $\partial(y_\varkappa)_x$ gesetzt werden muß; so wird, vermöge dieser Substitution, auch y_1 eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe, welche den Prinzipien der Variationsrechnung gemäß durch

5) $(y_1)_\varkappa$ oder $\delta^0 y_1 + \delta y_1 \cdot \varkappa + \delta^2 y_1 \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 y_1 \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$

bezeichnet wird, welche aber in der That (aus 1.)

6) $\partial(y_\varkappa)_x$ d. h. $\delta y + \delta^2 y \cdot \varkappa + \delta^3 y \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^4 y \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$

ist, weil man $\partial(y_\varkappa)_x = \partial(y_\varkappa)_\varkappa \cdot \partial\varkappa_x$, aber $\partial\varkappa_x = 1$ hat (aus 2.). Deshalb hat man dasmal zwischen den Koeffizienten $\delta^0 y_1$, δy_1, $\delta^2 y_1$ ꝛc. und δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. die Abhängigkeit

7) $$\delta^a y_1 = \delta^{a+1} y.$$

II. Da nun, vermöge unserer Aufgabe, die Reihe y_x (in I.) so gefunden werden soll, daß, wenn man sie statt y, also $\partial(y_x)_x$ oder $(y_1)_x$ statt y_1 in die gegebene Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ substituirt, letztere Gleichung identisch wird; so hat man, der Aufgabe gemäß, die unbestimmten Koeffizienten $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. so zu finden, daß

1) $$F_{x_x, y_x, (y_1)_x} = 0$$ wird für jedes x,

also wird auch nach (§. 251.)

2) $$\delta^0 F = 0, \quad \delta F = 0, \quad \delta^2 F = 0, \quad \delta^3 F = 0$$ ꝛc.,

und dies sind daher die einzelnen Gleichungen, aus denen die unbestimmten Koeffizienten $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. gefunden werden müssen.

III. Es ist nämlich nach (§. 250.)

1) $$\delta^0 F = F_{x,y,y_1},$$

sobald statt x, y, y_1 beziehlich die ersten Glieder α, $\delta^0 y$, $\delta^0 y_1$ der Reihen x_x, y_x, $(y_1)_x$ gesetzt werden, — und unter dieser letztern Voraussetzung hat man noch nach (§. 250.)

2) $$\delta F = \partial F_x \cdot \delta x + \partial F_y \cdot \delta y + \partial F_{y_1} \cdot \delta y_1;$$

3) $$\delta^2 F = \partial^2 F_x \cdot \delta x^2 + \partial^2 F_y \cdot \delta y^2 + \partial^2 F_{y_1} \cdot \delta y_1^2 + \\ + 2 \cdot \partial^{1,1} F_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y + 2 \cdot \partial^{1,1} F_{x,y_1} \cdot \delta x \cdot \delta y_1 + \\ + 2 \cdot \partial^{1,1} F_{y,y_1} \cdot \delta y \cdot \delta y_1 + \partial F_x \cdot \delta^2 x + \partial F_y \cdot \delta^2 y + \\ + \partial F_{y_1} \cdot \delta^2 y_1;$$

4) U. s. w. f.

Setzt man hier statt $\delta^0 y_1$, δy_1, $\delta^2 y_1$, $\delta^3 y_1$ ꝛc.
beziehlich δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, $\delta^4 y$ ꝛc.
nach (I. 7.), so wie 1 statt δx und 0 statt $\delta^2 x$, $\delta^3 x$ ꝛc. nach (I. 4.), und setzt man zuletzt die entstehenden Ausdrücke in (II. 2.); so hat man die Gleichungen, welche

$$\delta y, \quad \delta^2 y, \quad \delta^3 y \text{ ꝛc.}$$

geben in α und $\delta^0 y$ ausgedrückt, so daß $\delta^0 y$ ganz willkührlich

bleibt, und durch C bezeichnet werden kann, während der Gleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ genügt worden ist.

IV. Hat man aber nun auf diesem Wege die Koeffizienten δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, $\delta^4 y$ ꝛc. in α und $\delta^0 y$ oder C ausgedrückt, so ist

$$(\odot)\ldots\begin{cases} y = y_x \\ \text{d.h. } y = C + \delta y \cdot \frac{x-\alpha}{1} + \delta^2 y \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \delta^3 y \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \ldots \end{cases}$$

die Gleichung zwischen y und x, welche zur Rechten im Allgemeinen in allen Gliedern die willkührliche Konstante C enthält, und alle Funktionen y_x ausdrückt, welche der gegebenen Differenzialgleichung

$$(\mathfrak{C})\ldots F_{x,y,y_1} = 0$$

genügen, mit Ausnahme jedoch derjenigen, welche nicht bloß F_{x,y,y_1}, sondern zu gleicher Zeit auch noch einen oder mehrere der für δF, $\delta^2 F$, $\delta^3 F$ ꝛc. gefundenen Ausdrücke identisch zu Null machen, oder auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, so daß für sie die Gleichungen $\delta^0 F = 0$, $\delta F = 0$, $\delta^2 F = 0$, $\delta^3 F = 0$ ꝛc. nicht mehr alle zur Bestimmung der Koeffizienten $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. dienen, sondern die Ausdrücke für letztere die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, daher eine eigene in dieser allgemeinen Form nicht enthaltene Reihe geben. Dieser Fall muß daher später noch besonders in Erwägung gezogen werden *).

---

*) Jeder Werth y_x von y, er mag der Gleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ genügen oder nicht, ist doch immer eine Funktion von x, kann also doch immer und ohne Ausnahme in eine, nach ganzen Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufende Reihe verwandelt werden, deren Koeffizienten demnach wirklich existiren, also nicht von der Form $\frac{1}{0}$ gefunden werden können. Wenn daher die allgemeinen Formen der oben zur Bestimmung dieser Koeffizienten festgestellten Gleichungen zufällig die Bestimmung der Koeffizienten direkt nicht erlauben sollten, so müssen sie diese Koeffizienten δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc., da solche doch wirklich existiren, in der Form

§. 266. Zusatz.

Da die Ausdrücke $\delta^0 F$, δF, $\delta^2 F$, $\delta^3 F$ ꝛc. des (§. 265. III.), den (§§. 245. 246. und 250.) zu Folge, sobald man in ihnen statt der δ die Ableitungszeichen ∂ setzt,

für $$\delta x = 1,\ \delta^2 x = \delta^3 x = \text{ꝛc.} = 0,$$

nichts anders sind, als die Ausdrücke F, $\partial F_{(x)}$, $\partial^2 F_{(x)}$, $\partial^3 F_{(x)}$ ꝛc., so sind die so eben im (§. 265.) gefundenen Ausdrücke für δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. offenbar nichts anders als das, was aus den in der (Betrachtung zu §. 265.) für ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ ꝛc. gefundenen Funktionen π_1, π_2, π_3 ꝛc. von x und y wird, wenn man α statt x und C statt y schreibt. Und es erhellet also aus dem Gange der Auflösung des (§. 265.) zu gleicher Zeit, daß auch die Gleichung

$$(\text{ठ})\cdots\ y = C + [\pi_1]_{\alpha,C}\cdot\frac{x-\alpha}{1} + [\pi_2]_{\alpha,C}\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + [\pi_3]_{\alpha,C}\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots,$$

wie solche in der (N. 3. der Betrachtung zu §. 265.) gefunden worden ist, während C ganz willkührlich konstant bleibt, alle gesuchten Funktionen y_x von y (abgerechnet die oben erwähnten Ausnahmen) in sich schließe, wenn nur π_1, π_2, π_3, π_4 ꝛc. die Funktionen von x und y vorstellen, welche aus den Gleichungen

$$F = 0,\quad \partial F_{(x)} = 0,\quad \partial^2 F_{(x)} = 0,\quad \partial^3 F_{(x)} = 0 \text{ ꝛc.}$$

für ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, $\partial^4 y_x$ ꝛc. hervorgehen.

Dieses Auffinden der verschiedenen Funktionen π_1, π_2, π_3, π_4 ꝛc. geschieht aber so: Zuerst findet man aus $F_{x,y,y_1} = 0$, direkt $y_1 = \pi_1$, hernach eliminirt man aus $F = 0$ und $\partial F_{(x)} = 0$ die Ableitung y_1, so daß bloß eine Gleichung zwischen x,y und y_2 übrig bleibt, und lößt letztere dann nach y_2 auf, und man erhält $y_2 = \pi_2$ (man kann auch bloß aus

---

$\frac{0}{0}$ geben, und es können letztere daher, selbst aus diesen allgemeinen Gleichungen hergeholt, doch nie die Form $\frac{1}{0}$ annehmen.

$\partial F_{(x)} = 0$, direkt y_2 in x, y und y_1 ausgedrückt finden, statt y_1 aber sogleich die oben schon gefundene Funktion π_1 substituiren). Ferner wird man aus den 3 Gleichungen $F=0$, $\partial F_{(x)}=0$, $\partial^2 F_{(x)}=0$ sowohl y_1 als auch y_2 eliminiren, und aus der entstehenden Gleichung zwischen x, y und y_3 unmittelbar $y_3=\pi_3$ finden u. s. w. f.

Beispiel 1. Es sey gegeben die Differenzialgleichung

$$1) \quad x\cdot\partial y - 3y + cx^2 - nx^4 = 0 \text{ *)},$$

so erhält man aus ihr durch fortgesetztes Differenziiren nach allem x

$$2) \quad x\cdot\partial^2 y - 2\partial y + 2cx - 4nx^3 = 0,$$
$$3) \quad x\cdot\partial^3 y - \partial^2 y + 2c - 12nx^2 = 0,$$
$$4) \quad \partial^4 y - 24n = 0,$$
$$5) \quad \partial^5 y = 0 = \partial^6 y = \partial^7 y = \text{ꝛc.}$$

Also hat man aus (1.—5.) bloß in x und y ausgedrückt:

$$\partial y = \frac{3y - cx^2 + nx^4}{x},$$

$$\partial^2 y = \frac{6y - 4cx^2 + 6nx^4}{x^2},$$

$$\partial^3 y = \frac{6y - 6cx^2 + 18nx^4}{x^3},$$

$$\partial^4 y = 24n,$$

und $$\partial^5 y = 0 = \partial^6 y = \text{ꝛc.}$$

Und der in (ð) für y gefundene Werth giebt nun

$$y = C + \frac{3C - c\alpha^2 + n\alpha^4}{\alpha}\cdot(x-\alpha) + \frac{6C - 4c\alpha^2 + 6n\alpha^4}{\alpha^2}\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2!}$$
$$+ \frac{6C - 6c\alpha^2 + 18n\alpha^4}{\alpha^3}\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3!} + 24n\cdot\frac{(x-\alpha)^4}{4!},$$

welche Gleichung dasmal noch überdies eine endliche Form hat, und sich sogleich auf

---

*) Da ∂y oder ∂y_x identisch ist mit dem Quotienten $\frac{dy}{dx}$ der beiden Differenzialien dy und dx, so kann dieselbe Gleichung auch in der Form

$$x\cdot dy - 3y\cdot dx + cx^2\cdot dx - nx^4\cdot dx = 0$$

gegeben seyn. Dividirt man aber dann durch dx weg, so erhält man sogleich die obige Form.

$$y = c\cdot x^2 + m\cdot x^3 + n\cdot x^4$$

zurückzieht, sobald man den von der Konstante C abhängigen und daher mit C gleich willkührlichen Ausdruck

$$\frac{C - c\alpha^2 - n\alpha^4}{\alpha^3}$$ durch m

bezeichnet, so daß m die willkührliche Konstante vorstellt, wo dann $C = c\alpha^2 + m\alpha^3 + n\alpha^4$ ist.

Beispiel 2. Ist gegeben die Differenzialgleichung

$$1)\quad y = x\cdot log\, x\cdot \partial y \quad \text{oder} \quad \partial y = \frac{y}{x\cdot log\, x},$$

so erhält man durch fortgesetztes Differenziiren

$$2)\quad x\cdot\partial^2 y + \partial y = 0 \quad \text{oder} \quad \partial^2 y = -\frac{y}{x^2\cdot log\, x},$$

$$3)\quad x\cdot\partial^3 y + 2\cdot\partial^2 y = 0 \quad \text{oder} \quad \partial^3 y = +2\cdot\frac{y}{x^3\cdot log\, x},$$

$$4)\quad x\cdot\partial^4 y + 3\cdot\partial^3 y = 0 \quad \text{oder} \quad \partial^4 y = -3!\frac{y}{x^4\cdot log\, x},$$

$$5)\quad x\cdot\partial^5 y + 4\cdot\partial^4 y = 0 \quad \text{oder} \quad \partial^5 y = +4!\frac{y}{x^5\cdot log\, x},$$

u. s. w. f.

Also giebt der Ausdruck (♁) sogleich

$$y = C + \frac{C}{\alpha\cdot log\,\alpha}\cdot(x-\alpha) - \frac{C}{\alpha^2\cdot log\,\alpha}\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + 2!\frac{C}{\alpha^3\cdot log\,\alpha}\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3!}$$
$$- 3!\frac{C}{\alpha^4\cdot log\,\alpha}\cdot\frac{(x-\alpha)^4}{4!} + 4!\frac{C}{\alpha^5\cdot log\,\alpha}\cdot\frac{(x-\alpha)^5}{5!} - \text{ꝛc.},$$

oder, wenn man $\frac{C}{log\,\alpha} = a$ setzt, so daß a willkührlich konstant wird,

$$y = a\cdot\left[log\,\alpha + \left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^4 + \text{ꝛc.}\right].$$

Weiß man nun, daß die in den eckigen Klammern befindliche unendliche Reihe nichts weiter als $log\, x$ ist, in eine nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufende Reihe verwandelt, so hat man noch überdies in endlicher Form

$$y = a\cdot log\, x,$$

als diejenige Gleichung, welche der gegebenen Differenzialgleichung (1.) im Allgemeinsten genügt. — Findet man nämlich aus $y = a\cdot log\, x$ noch $\partial y = \frac{a}{x}$, und setzt diese beiden Werthe statt y und ∂y in die

gegebene Differenzialgleichung $y = x \cdot log\, x \cdot \partial y$; so wird letztere identisch $a \cdot log\, x = a \cdot log\, x$ *).

Anmerkung 1. Im ersten Beispiele brach die unendliche Reihe (ð) von selber ab. Dies muß sich offenbar allemal so treffen, so oft die gesuchte Funktion y_x eine algebraische rationale ganze Funktion von x irgend eines Grades ist.

Anmerkung 2. In beiden vorliegenden Beispielen ist α von selbst herausgefallen, so daß alle Ausdrücke für y, welche diesen gegebenen Differenzialgleichungen genügen, nur eine einzige willkührliche Konstante m oder a in sich aufnehmen und nicht deren zweie α und C, wie dies anfänglich hätte scheinen können.

§. 267. Zusatz.

Es läßt sich aber allgemein beweisen, daß der Ausdruck, welcher alle Werthe für y liefert, die $F = 0$ identisch machen, nur eine einzige willkührliche Konstante in sich aufnehmen könne, also daß es allemal möglich ist, in dem oben (265. IV. ⊙) oder (§. 266. ð) gefundenen allgemeinen Ausdruck für y, statt C eine solche Zusammensetzung aus α und einer neuen willkührlichen Konstante (etwa a) zu setzen, daß α von selbst sich weghebt, und nur noch die einzige willkührliche Konstante bleibt.

Denn es bezeichne $\psi_{x,\alpha,C}$ die Reihe (§. 266. ð) oder (§. 265. IV. ⊙), und $\varphi_{x,a}$ das, was aus $\psi_{x,\alpha,C}$ wird, wenn man dem α einen beliebigen Ziffernwerth giebt und zugleich die eben so willkührliche Konstante a statt C schreibt; so bleibt zu beweisen, daß $\varphi_{x,a}$ eben so allgemein ist als $\psi_{x,\alpha,C}$, d. h. daß $\varphi_{x,a}$ alle Werthe von $\psi_{x,\alpha,C}$ in sich schließe. Weil aber der Ausdruck φ der Gleichung $F = 0$ genügt, wenn er statt y gesetzt wird; so liefert die Gleichung $F_{x,\varphi,\partial\varphi} = 0$ für $\partial\varphi_x$, $\partial^2\varphi_x$, $\partial^3\varphi_x$ ꝛc. genau dieselben Ausdrücke in x und φ, wie sie im (§. 266.) als für ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ ꝛc. in x und y gefunden, angegeben worden sind. Wendet man daher auf $\varphi_{x,a}$ den allgemeinern Maclaurin'=

---

*) Der Anfänger behandele diese beiden Beispiele noch direkt nach der Vorschrift des (§. 265.), und derselbe wird genau wieder dieselben Resultate, ja fast durch dieselbe Rechnung, erhalten

schen Lehrsatz an, um $\varphi_{x,a}$ in eine nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufende Reihe zu verwandeln, und bezeichnet man dabei das, was aus $\varphi_{x,a}$ oder φ wird, wenn man α statt x setzt, durch C; so erhält man für $\varphi_{x,a}$ nothwendig genau die Reihe (♂ des §. 266.), also genau die vorhin durch $\psi_{x,\alpha,C}$ bezeichnete Reihe. — Also gehen alle Werthe von $\psi_{x,\alpha,C}$ aus $\varphi_{x,a}$ hervor, sobald man in $\varphi_{x,a}$ statt a das setzt, was aus der Gleichung $C = \varphi_{\alpha,a}$ für a sich ergiebt, unter $\varphi_{\alpha,a}$ das verstanden, was aus $\varphi_{x,a}$ wird, sobald man α statt x setzt. — Umgekehrt geht aus $\psi_{x,\alpha,C}$ der Ausdruck $\varphi_{x,a}$ mit der einzigen willkührlichen Konstante a hervor, d. h. in $\psi_{x,\alpha,C}$ hebt sich α ganz weg, und es bleibt bloß die einzige Konstante a noch, sobald statt der allgemeinen Konstante C, der wegen der willkührlichen Konstante a eben so allgemeine Ausdruck $\varphi_{\alpha,a}$ substituirt wird.

Betrachtet man das Beispiel (2. zu §. 266.), so findet man, daß $C = a \cdot log\,\alpha$ gesetzt worden ist, um $y = a \cdot log\,x$ oder $\psi_{x,\alpha,C} = a \cdot log\,x$ zu finden. Der hier durch $\varphi_{\alpha,a}$ bezeichnete Ausdruck ist daher in diesem Beispiel das Produkt $a \cdot log\,\alpha$, und der Werth von y, welcher nun erhalten worden, dasselbe Produkt, nur x statt α geschrieben.

In dem Beispiel (1.) ebendaselbst wird man bemerken, daß $\varphi_{\alpha,a}$ dort den Ausdruck $c\alpha^2 + m\alpha^3 + n\alpha^4$ vorstellt, und daß dann wirklich $y = \varphi_{x,a}$ geworden ist.

Der Ausdruck, welcher alle Werthe enthält, die, wenn man sie statt y setzt, eine gegebene Differenzialgleichung von der ersten Ordnung

$$F_{x,y,\partial y} = 0 \quad \text{oder} \quad F_{x,y,y_1} = 0$$

identisch machen, enthält daher nur eine einzige willkührliche Konstante a, welche jedoch auch durch jeden andern, dem F fremden Buchstaben vorgestellt werden kann, ja welcher man jede Form geben kann, die wenigstens einen willkührlichen (dem F fremden) Buchstaben in sich aufgenommen hat. Aber gerade dieses letztern Umstandes wegen kann derselbe, durch y repräsentirte Ausdruck scheinbar auch mehr als eine willkührliche Konstante in sich schließen, wie dies z. B. bei dem vorhin durch $\psi_{x,\alpha,C}$ bezeichneten der Fall gewesen ist.

§. 268. Erklärung.

Eine Gleichung zwischen x, y und einer, in der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,\partial y} = 0$ nicht vorkommenden, also willkührlichen Konstante a, welche nach y aufgelößt, alle Werthe für y liefert, die $F = 0$ identisch machen (mit Ausnahme der in §. 265. IV. erwähnten), nennt man aber das allgemeine Integral von $F = 0$, oder die allgemeine Integralgleichung. Jede besondere Gleichung, welche für besondere (konstante) Werthe von a daraus hervorgeht, welche also keinen, dem F fremden Buchstaben mehr enthält, wird dann besondres oder partikuläres Integral genannt, auch eine besondere oder partikuläre Integralgleichung. Alles dem (§. 155. d. IV. Th. d. S.) analog.

Ja man kann auch hier von einem, mit $x = \alpha$ anfangenden Integral sprechen, wenn man nämlich der Konstante a einen solchen besondern Werth gegeben sich denkt, daß der für y sich ergebende Werth $= 0$ wird, so oft man α statt x schreibt *).

§. 269. Zusatz.

I. Ist $f_{x,y,a} = 0$ das allgemeine Integral von $F_{x,y,\partial y} = 0$, so hat man zur Bestimmung von y und ∂y_x in x, die beiden Gleichungen

1) $f = 0$ und 2) $\partial f_{(x)} = 0$ d. h. $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0$.

Findet man nun aus diesen beiden Gleichungen y und ∂y beide in x und a ausgedrückt, und substituirt man diese Werthe statt y und ∂y in $F = 0$, so müssen sich, da F identisch gleich 0 wird, auch die a wegheben. Also muß $F = 0$ hervorgehen, wenn man aus den beiden Gleichungen $f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$ die willkührliche Konstante a eliminirt.

Man versuche dieses bei den Beispielen des (§. 266.).

---

*) In dem Ausdruck (§. 265. IV. ⊙) oder (§. 266. ♂) müßte man nur $C = 0$ nehmen, um das mit $x = \alpha$ anfangende Integral zu haben, unter α einen bestimmten Ziffernwerth gedacht.

II. Löst man aber das allgemeine Integral

1) $f_{x,y,a} = 0$ der Differenzialgleichung 2) $F_{x,y,y_1} = 0$

nach der willkührlichen Konstante a auf, so daß man

3) $\varphi_{x,y} - a = 0$

erhält, so giebt das unmittelbare Differenziiren $\partial\varphi_{(x)} = 0$ d. h.

4) $\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y = 0$ oder $\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot y_1 = 0$.

Da aber diese Gleichung jetzt nicht mehr die willkührliche Konstante a enthält, so fällt sie ohne weiters mit der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ zusammen, d. h. wenn man nach (§. 266.) aus $F = 0$ findet

5) $y_1 = (\pi_1)_{x,y}$,

und dann aus (4.) noch

6) $y_1 = -\frac{\partial\varphi_x}{\partial\varphi_y}$;

so muß

7) $(\pi_1)_{x,y} = -\frac{\partial\varphi_x}{\partial\varphi_y}$

identisch seyn, nach x allein und nach y allein, d. h. für jedes x und für jedes y. — Daher ist dann auch nach (4.)

8) $\partial\varphi_{(x)} = \partial\varphi_y \cdot (-\pi_1 + y_1)$,

für jedes x, für jedes y und für jedes y_1.

III. Da ferner in dem allgemeinen Integral

1) $\varphi_{x,y} = a$,

statt der willkührlichen Konstante a jede willkührliche Funktion einer andern Konstante c gesetzt werden kann; so ist auch dasselbe allgemeine Integral in der Form

2) $\varphi_{x,y} = \psi_c$,

aber deshalb auch, wenn man sich diese Gleichung (2.) nach c aufgelöst denkt, in der Form

3) $\psi_\phi = c$

enthalten, wo ψ_ϕ eine ganz willkührliche Funktion von φ, φ dagegen die obige Funktion $\varphi_{x,y}$ vorstellt.

Auch bestätigt sich dasselbe a posteriori. Differenziirt man nämlich die Gleichung

$$\psi_\phi = c,$$

so erhält man

$$\partial\psi_\phi \cdot \partial\varphi_{(x)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial\psi_\phi \cdot (\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y) = 0,$$

oder, wenn man durch $\partial\psi_\phi$ wegdividirt, wiederum die Differenzialgleichung

$$\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y = 0 \quad \text{oder} \quad F_{x,y,y_1} = 0.$$

§. 270. Zusatz.

A. β) Von den singulären Werthen der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

Ehe wir zu den Differenzialgleichungen der 2ten Ordnung übergehen, wollen wir nun noch die im (§. 265. IV.) erwähnten Ausnahmsfälle betrachten, d. h. die Fälle, in denen die δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. des (§. 265.) oder die ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$ ꝛc. des (§. 266.) aus den dazu hingestellten Gleichungen nicht gefunden werden können, weil letztere den zu findenden Unbekannten in der Form $\frac{0}{0}$ geben.

I. Die erstern dieser Ausnahms-Werthe y_x von y sind diejenigen, welche schon

$$y_1 = \pi_1 = \frac{u_{x,y}}{w_{x,y}}$$

auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, wo also die gegebene Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ auf die Form

$$V_{x,y} \cdot (M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y) = 0$$

gebracht werden kann. Es lassen sich leicht folgende Bemerkungen aufstellen:

1) Der Differenzialgleichung in dieser Form wird genügt, durch die Werthe y_x von y, welche dem Faktor

$$M + N \cdot \partial y = 0$$

genügen, aber auch durch alle die Werthe y_x von y, welche dem andern Faktor

$$V_{x,y} = 0$$

entsprechen.

2) Die letztern Werthe y_x von y können unter den erstern zufällig mit enthalten seyn; sie werden aber im Allgemeinen als den erstern fremd angesehen werden müssen.

3) Die erstern werden gefunden, wenn man die gegebene Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ vorher von ihrem Faktor $V_{x,y}$ befreit, und auf den andern Faktor

$$M + N \cdot \partial y = 0 \quad \text{oder} \quad M + N \cdot y_1 = 0$$

das Verfahren des (§. 265. oder §. 266.) in Anwendung bringt. Man erhält dann das allgemeine Integral $f_{x,y,a} = 0$ mit der willkührlichen Konstante a, oder selber wieder Ausnahmswerthe.

4) Wenn dann die andern Werthe y_x von y aus der Gleichung

$$V_{x,y} = 0$$

gefunden sind; wenn ferner diese Werthe statt y in das allgemeine Integral $f_{x,y,a} = 0$ substituirt werden, oder, was dasselbe ist, wenn y aus $V_{x,y} = 0$ und $f_{x,y,a} = 0$ eliminirt wird; und wenn dann in der entstehenden Gleichung kein (nach x) konstanter Werth für a gefunden werden kann, welcher x von selbst wegfallen, und zu gleicher Zeit die Gleichung identisch macht: so sind die aus $V_{x,y} = 0$ erhaltenen Werthe nicht im allgemeinen Integral $f_{x,y,a} = 0$ mit begriffen, und werden deshalb singuläre Werthe genannt.

5) Wenn einer der aus $V = 0$ hervorgegangenen Werthe y_x von y, zu gleicher Zeit auch dem andern Faktor $M + N \cdot \partial y = 0$ genügt, so kann man nicht daraus folgern, daß solcher Werth y_x von y kein singulärer Werth (sondern eines der Integrale) sey, weil für diesen andern Faktor

$$M + N \cdot \partial y = 0$$

selber wieder singuläre Werthe existiren können.

6) So oft dagegen ein Werth y_x von y, der den ersten Faktor $V_{x,y}$ zu Null macht, diesem zweiten Faktor nicht genügt, so oft ist derselbe gewiß keines der Integrale, sondern ein singulärer Werth.

Beispiel 1. Die Differenzialgleichung

$$1)\quad x^2-y+a+R\cdot\partial y\cdot\sqrt{x^3-xy+ax}=0$$

giebt

$$2)\quad \partial y=-\frac{x^2-y+a}{R\cdot\sqrt{x^3-xy+ax}},$$

und dieser Ausdruck zur Rechten wird $\frac{0}{0}$ wenn

$$3)\quad x^2-y+a=0 \quad \text{oder} \quad y=x^2+a$$

genommen wird. Die Differenzialgleichung (1.) kann daher die Form annehmen

$$4)\quad \sqrt{x^2-y+a}\cdot(\sqrt{x^2-y+a}+R\cdot\partial y\cdot\sqrt{x})=0,$$

und wird, wenn man durch den Faktor $\sqrt{x^2-y+a}$ wegdividirt,

$$5)\quad \sqrt{x^2-y+a}+R\cdot\partial y\cdot\sqrt{x}=0.$$

Weil aber der Werth (3.), welcher die Gleichung (1.) identisch macht, den Faktor (5.) nicht identisch zu Null macht, so ist dieser Werth (3.) nothwendig ein singulärer Werth.

Beispiel 2. Die Differenzialgleichung

$$1)\quad y^3-axy-xy^2\cdot\partial y+ax^2\cdot\partial y=0$$

giebt

$$2)\quad \partial y=\frac{y^3-axy}{xy^2-ax^2}=\frac{(y^2-ax)\cdot y}{(y^2-ax)\cdot x},$$

und dieser Ausdruck π_1 wird $\frac{0}{0}$, wenn

$$3)\quad y^2-ax=0$$

genommen wird. Dividirt man aber durch den Faktor y^2-ax weg, so erhält man statt (1.) jetzt

$$4)\quad y-x\cdot\partial y=0 \quad \text{oder} \quad y\cdot\partial x_y-x=0,$$

deren allgemeines Integral nach (§. 266.), wenn man dort x und y vertauscht,

$$5)\quad x=cy^2$$

gefunden wird. Setzt man nun hier herein statt y den Werth aus (3.), so erhält man

$$x=acx \quad \text{oder} \quad 1=ac \quad \text{oder} \quad c=\frac{1}{a}.$$

Demnach ist der Werth (3.) dasmal kein singulärer Werth, sondern dasjenige besondere Integral des allgemeinen Integrals (5.), welches aus letzterem hervorgeht, wenn $\frac{1}{a}$ statt der willkührlichen Konstante c ge-

setzt wird. Daher genügt der Werth aus (3.) nothwendig auch der Gleichung (4.) *).

Beispiel 3. Die Differenzialgleichung

1) $y^2-x+a+(b-by\cdot\partial y)\cdot\sqrt{y^2-x+a}=0$

auf dieselbe Weise behandelt, zerlegt sich wiederum in zwei Faktoren, so daß

entweder 2) $\sqrt{y^2-x+a}=0$ d. h. $y^2-x+a=0$

oder 3) $\sqrt{y^2-x+a}+b-by\cdot\partial y=0$

ist. Dasmal genügen jedoch die aus dem ersten Faktor (2.) gezogenen Werthe von y, zu gleicher Zeit auch dem andern Faktor (3.). Trotz dem aber sind diese Werthe $y=\pm\sqrt{x-a}$ doch nur singuläre Werthe; denn das allgemeine Integral von (3.) findet sich **)

4) $4b^2\cdot y^2-x^2-(4b^2+2c)\cdot x+4ab^2-c^2=0$,

wo c die willkührliche Konstante ist. Setzt man nun hierin $\pm\sqrt{x-a}$ statt y, so erhält man $-x^2-2cx-c^2=0$ oder $x+c=0$. Es fällt daher dasmal x nicht von selber weg, und man müßte statt der willkührlichen Konstante c in (4.) den Veränderlichen Ausdruck $-x$ setzen, wenn aus dem allgemeinen Integral die Werthe (2.) hervorgehen sollten.

Die singulären Werthe zu finden, welche eine solche Gleichung (3.) noch hat, die bereits von ihrem gemeinschaftlichen Faktor (2.) befreit ist, das lehren eben die nun folgenden Nummern (II. III. ꝛc.) des gegenwärtigen Paragraphen.

II. 1) Um nun die ferneren Ausnahmswerthe zu erhalten, wie sie einer gegebenen Differenzialgleichung der ersten Ordnung

$$F_{x,y,y_1}=0$$

zukommen können, muß man dem (§. 265. IV.) und (§. 266.) gemäß, zunächst die nach (§. 266.) gefundene Gleichung

---

*) Und ist a ganz unbestimmt, so ist dieser Werth (3.) nicht einmal ein besonderes Integral, sondern dem allgemeinen Integral völlig gleich zu achten.

**) Man darf nur $y^2=v$ (oder $y^2-x+a=u$) setzen, und die Gleichung in v (so wie die Gleichung in u), welche man dann erhält, giebt sogleich dieses hier in (4.) angemerkte allgemeine Integral, wenn solche nach (§. 266.) behandelt wird.

$$\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y} = \frac{U_{x,y}}{W_{x,y}}$$

vornehmen, und hier nun den Ausdruck zur Rechten auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, d. h. Werthe y_x von y suchen, welche den dreien Gleichungen

$$F = 0, \quad U = 0 \quad \text{und} \quad W = 0$$

zu gleicher Zeit genügen *).

2) Gelingt dies, so muß die aus $F = 0$ abgeleitete Gleichung der zweiten Ordnung, nachdem aus ihr y_1 oder ∂y eliminirt ist, die Form

$$V_{x,y} \cdot (P_{x,y} + Q_{x,y} \cdot \partial^2 y) = 0$$

annehmen, und wird also mit $F_{x,y,y_1} = 0$ zugleich identisch für alle Werthe von y, welche

$$V_{x,y} = 0$$

machen; außerdem aber auch noch für alle die Werthe von y, welche den andern Faktor zu Null machen, d. h. welche der Gleichung

$$P + Q \cdot \partial^2 y = 0$$

genügen.

3) Werden nun die erstern aus $V = 0$ hervorgehenden Werthe nach (I. 4.) an dem allgemeinen Integral geprüft, so wird man erfahren, ob sie Integrale sind, oder durchaus nicht zu den Integralen gezählt werden können, daher wiederum singuläre Werthe genannt werden.

4) Um die letztern Werthe zu finden, muß man die Gleichung der 2ten Ordnung von ihrem Faktor $V_{x,y}$ befreien, also nur

$$P_{x,y} + Q_{x,y} \cdot \partial^2 y = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial^2 y = -\frac{P}{Q} = \pi_2$$

nehmen, und dann nach (§. 266.) weiter behandeln, und man

---

*) Die später folgende Nummer (XIV.) beweist, daß die Werthe, welche $U = 0$ und $W = 0$ identisch machen, allemal zu gleicher Zeit auch der $F = 0$ genügen müssen. Dies erleichtert die Rechnungen sehr, weil man $F = 0$ ganz außer Acht lassen kann.

wird dann das allgemeine Integral erhalten mit einer willkührlichen Konstante, oder vielleicht selber wieder zu Ausnahmswerthen geführt werden.

5) Um endlich die dem Faktor $V_{x,y} = 0$ entsprechenden Werthe y_x von y zu finden, ist es nicht gerade nothwendig, daß man die Gleichung der 2ten Ordnung in der Form

$$\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y}$$

wirklich herstelle, sondern man kann bloß aus der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ durch Differenziiren (also ohne sogleich y_1 zu eliminiren)

$$\partial F_{(x)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial F_x + \partial F_y \cdot y_1 + \partial F_{y_1} \cdot \partial^2 y = 0,$$

also $$\partial^2 y = -\frac{\partial F_x + \partial F_y \cdot y_1}{\partial F_{y_1}} = \frac{U_{x,y,y_1}}{W_{x,y,y_1}}$$*)

finden, und dann Werthe y_x von y aufsuchen, welche den 3 Gleichungen

$$F_{x,y,y_1} = 0, \quad U_{x,y,y_1} = 0 \quad \text{und} \quad W_{x,y,y_1} = 0$$

zu gleicher Zeit genügen. Diese Werthe findet man aber, so oft dergleichen existiren, wenn man aus zweien dieser Gleichungen $F = 0$, $U = 0$, $W = 0$, die Ableitung y_1 eliminirt, aus der Eliminationsgleichung y in x ausdrückt, und dann jeden dieser Werthe y_x von y in alle 3 Gleichungen substituirt, und so sich überzeugt, daß wirklich alle drei identisch werden**).

---

*) Da die Ausdrücke ∂F_x, ∂F_y und auch ∂F_{y_1} selber schon Bruchform haben können, so ist hier $\frac{U}{W}$ als ein solcher Quotient gedacht, in welchem U und W selber nicht mehr Bruchform haben.

**) Wenn aus zwei Gleichungen $U = 0$ und $W = 0$, die Ableitung y_1 eliminirt, und die Eliminationsgleichung $V_{x,y} = 0$ erhalten wird; so ist gar nicht zu behaupten, daß die Werthe y_x von y, welche $V = 0$ machen, auch den Gleichungen $U = 0$ und $W = 0$ genügen müssen. Wenn man aber die aus $V = 0$ gezogenen Werthe an einer einzigen der Gleichungen $U = 0$ oder $W = 0$ geprüft hat, und diese Gleichung identisch wird, dann muß auch die andere dieser Gleichungen nothwendig identisch werden: dagegen muß man auf's neue wieder ver-

6) Will man aber den andern Faktor

$$P + Q \cdot \partial^2 y = 0$$

haben, um $\partial^2 y$ wirklich zu finden, und so das Verfahren des (§. 266.) zur Auffindung des allgemeinen Integrals fortsetzen zu können, so muß man aus

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \partial^2 y = (\pi_2)_{x,y,y_1} = \frac{U_{x,y,y_1}}{W_{x,y,y_1}}$$

y_1 wirklich eliminiren, um den Faktor $V_{x,y}$, durch welchen die Gleichung der 2ten Ordnung wegdividirt werden kann und soll, und so auch diese Gleichung der 2ten Ordnung in der, zur Bestimmung von $\partial^2 y$ brauchbaren Form

$$P_{x,y} + Q_{x,y} \cdot \partial^2 y = 0$$

wirklich zu erhalten.

7) Genügt endlich einer der aus $V_{x,y} = 0$ gezogenen Werthe y_x von y zu gleicher Zeit auch dieser letztern Gleichung

$$P + Q \cdot \partial^2 y = 0;$$

so darf man daraus noch nicht folgern, daß dieser Werth kein singulärer Werth (sondern eines der besondern Integrale) sey. Es kann vielmehr auch noch Werthe y_x von y geben, welche der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ und zu gleicher Zeit noch der Gleichung $P + Q \cdot \partial^2 y = 0$ genügen können, und welche deswegen doch nicht in dem allgemeinen Integral von $F = 0$ enthalten sind, wie dies später für die Differenzialgleichungen der 2ten Ordnung noch besonders nachgewiesen werden wird.

8) Genügt dagegen ein solcher aus $V = 0$ gezogener und der $F = 0$ genügender Werth y_x von y der Gleichung

---

suchen, ob dieselben Werthe auch wirklich der Gleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ genügen oder nicht.

Daß übrigens, wenn aus zweien Gleichungen eine dritte erhalten wird, die Werthe, welche diese 3te Gleichung identisch machen, keinesweges nothwendig auch den beiden ersten Gleichungen genügen müssen, ist eine aus den Elementen der Arithmetik und Algebra sehr bekannte, aber zuweilen, wie es scheint, von den Geübteren wiederum vergessene Wahrheit. Man lese die Note im (III. Th. d. S. pag. 241 u. 242.).

$$P+Q\cdot\partial^2 y=0$$

nicht, so ist er gewiß ein singulärer Werth, d. h. er ist dann gewiß im allgemeinen Integral von $F=0$ nicht enthalten.

Beispiel 1. Aus der gegebenen Differenzialgleichung der ersten Ordnung

1) $$(-y+\sqrt{x^2+y^2-b})\cdot\partial y-x=0,$$

erhält man nach (II. 5.)

2) $$\partial^2 y=\frac{y^2-b-y\cdot\sqrt{x^2+y^2-b}+x\cdot(-y+\sqrt{x^2+y^2-b})\cdot\partial y}{\sqrt{x^2+y^2-b}\cdot(-y+\sqrt{x^2+y^2-b})^2}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks zur Rechten wird Null, einmal wenn

3) $$x^2+y^2-b=0,$$

dann aber auch wenn $-y+\sqrt{x^2+y^2-b}=0$ genommen wird. Weil aber der letztere Werth den Zähler in (2.) nicht zu Null macht, so ist solcher nicht weiter zu berücksichtigen. Der Werth aus (3.) dagegen macht den Zähler in (2.) der Null gleich, macht also $\partial^2 y=\frac{0}{0}$, genügt auch der gegebenen Differenzialgleichung (1.), und ist endlich, wie die Prüfung (I. 4.) zeigt, in dem allgemeinen Integral der (1.), nämlich in der Gleichung

4) $$x^2-2ay-a^2-b=0$$

mit der willkührlichen Konstante a, wie solche nach (§. 266.) erhalten wird, nicht enthalten, ist also ein singulärer Werth.

Eliminirt man aber aus den Gleichungen (1. und 2.) ∂y, so erhält man

5) $$\partial^2 y=\frac{x^2+y^2-b-y\cdot\sqrt{x^2+y^2-b}}{(x^2+y^2-b)(-y+\sqrt{x^2+y^2-b^2})}=\pi_2.$$

Dividirt man nun Zähler und Nenner durch den gemeinschaftlichen Faktor weg, so ergiebt sich

6) $$\partial^2 y=\frac{1}{-y\sqrt{x^2+y^2-b}+x^2+y^2-b}$$

oder $$1+(y\cdot\sqrt{x^2+y^2-b}-(x^2+y^2-b))\cdot\partial^2 y=0.$$

Und da der obige aus (3.) gefundene Werth dieser Gleichung (6.) der 2ten Ordnung nicht genügt, so hätte man schon hieraus, und ohne zum allgemeinen Integral (4.) sich wenden zu müssen, schließen können, daß diese Werthe aus (3.) im allgemeinen Integral nicht enthalten sind.

Hätten aber diese Werthe aus (3.) der Gleichung (6.) ebenfalls genügt, so hätten sie doch noch singuläre Werthe eben so gut, als auch besondere Integrale seyn können.

Beispiel 2. Ist gegeben die Differenzialgleichung der ersten Ordnung

1) $4(y-x\cdot\partial y)^2 = (x^2+y^2)^2\cdot(1+\partial y^2)$,

so erhält man daraus

2) $\partial^2 y = -\frac{2(1+\partial y^2)(y\cdot\partial y+x)(x^2+y^2)}{(4x^2-(x^2+y^2)^2)\cdot\partial y-4xy}$.

Setzt man hier zur Rechten Zähler und Nenner $= 0$, so erhält man

3) $(1+\partial y^2)(y\cdot\partial y+x)(x^2+y^2) = 0$

und 4) $(4x^2-(x^2+y^2)^2)\cdot\partial y-4xy = 0$;

und es fragt sich nun, ob es Werthe y_x von y giebt, welche die Gleichungen (3. 4. und auch 1.) zu gleicher Zeit identisch machen. Eliminirt man, um diese Werthe, im Falle deren existiren, zu finden, ∂y aus (1. u. 4.) so erhält man

5) $(x^2+y^2)^2\cdot(4-x^2-y^2)\cdot(2x+x^2+y^2)\cdot(-2x+x^2+y^2) = 0$.

Jeder dieser 4 Faktoren, wenn er der Null gleich gesetzt wird, genügt nun auch der Gleichung (1.), aber nur die beiden erstern genügen zu gleicher Zeit der Gleichung (4.). Also hat man dasmal die Werthe

6) $x^2+y^2 = 0$ und 7) $x^2+y^2 = 4$,

von denen noch zu untersuchen bleibt, ob sie singuläre Werthe oder besondere Integrale sind. Wollen wir aber dabei nicht zu dem allgemeinen Integral unsre Zuflucht nehmen, sondern lieber vorläufig die Gleichung der 2ten Ordnung auf die Form

8) $\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y}$

bringen, und dann durch den gemeinschaftlichen Faktor $V_{x,y}$ Zähler und Nenner von π_2 wegdividiren, um die Gleichung

9) $\partial^2 y = -\frac{P}{Q}$ oder $P+Q\cdot\partial^2 y = 0$

zu erhalten; so findet man, daß die Werthe aus (7.) der Gleichung (9.) nicht genügen, also gewiß singuläre Werthe von (1.) sind, daß aber die Werthe aus (6.) auch noch der Gleichung (9.) Genüge leisten, so daß es von diesen noch unbestimmt bleibt, ob sie singuläre Werthe oder besondere Integrale seyn werden. — Geht man aber zu dem allgemeinen Integral der gegebenen Differenzialgleichung (1.), welches

10) $(1+a^2)(y^2+x^2)+4ay+2(1-a^2)x = 0$

gefunden wird *), und eliminirt man y aus ihr und aus (6.), so fällt x von selbst mit weg, und man sieht, wie (6.) diejenigen besonderen Integrale liefert, welche aus dem allgemeinen Integral (10.) hervorgehen, wenn die Konstante $a = \sqrt{-1}$ genommen wird.

Es wäre möglich, daß man für die gegebene Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ der ersten Ordnung noch mehrere singuläre Werthe erhalten könnte, dadurch, daß man auch $\partial^3 y = (\pi_3)_{x,y}$ und dann noch $\partial^4 y = (\pi_4)_{x,y}$ ꝛc. finden, und $= \frac{0}{0}$ setzen wollte. Es ist aber gerathener, vorher erst die beiden bis jetzt (in I. und II.) gefundenen Arten singulärer Werthe im Zusammenhange unter sich und mit den allgemeinen Integralen näher zu betrachten. Dann wird man zuletzt einsehen, daß (I. und II.) alle existirenden singulären Werthe liefern.

III. Zuvörderst fällt in die Augen, daß jeder singuläre Werth

1) $y = \psi_x,$

einer gegebenen Differenzialgleichung

2) $F_{x,y,y_1} = 0,$

aus dem allgemeinen Integral

3) $f_{x,y,} = 0$

derselben hervorgeht, wenn man statt a eine schickliche Funktion von x setzt. Diese Funktion a_x für a findet man aber, wenn man aus (1. u. 3.) y eliminirt, und dann die Eliminations-Gleichung zwischen x und a nach a auflößt.

Die Differenzialgleichung

$$(x\cdot\partial y - y)(x\cdot\partial y - 2y) + x^2 = 0$$

---

*) Die Methode des (§. 266.) giebt dieses allgemeine Integral nur in Form einer unendlichen Reihe. In einem später folgenden Kapitel (des nächsten 6. Th. d. S.) werden aber die Methoden beigebracht, durch welche man versucht, dergleichen Integrale, wenn sie existiren, in endlicher Form zu erhalten.

hat zum allgemeinen Integral nach (§. 266.)

$$y - ax - \frac{x^2}{a} = 0$$

und zum singulären Werth

$$y^2 - 4x^3 = 0.$$

Eliminirt man nun y aus den beiden letztern Gleichungen, so erhält man

$$a^2x^2 + \frac{x^4}{a^2} - 2x^3 = 0$$

d. h. $\left(a - \frac{x}{a}\right)^2 = 0$ oder $a^2 - x = 0$

oder $a = \surd x.$

Setzt man also in dem allgemeinen Integral statt der willkührlichen Konstante a diese Funktion $\surd x$, so erhält man den singulären Werth.

IV. Giebt man aber dem allgemeinen Integral (III. 3.) die Form

1) $\varphi_{x,y} = a,$

indem man solches nach der willkührlichen Konstante a auflößt, und findet man aus der Differenzialgleichung $F = 0$ (III. 2.)

2) $\partial y = \pi_1$ oder $-\pi_1 + \partial y = 0;$

so ist nach (§. 269. II.)

3) $\frac{\partial \varphi_x}{\partial \varphi_y} + \pi_1 = 0$ oder $\partial \varphi_x = -\pi_1 \cdot \partial \varphi_y$

identisch, für jedes x und auch für jedes y, also auch, wenn der singuläre Werth ψ_x statt y gesetzt wird. Derselbe singuläre Werth, statt y gesetzt, macht aber

4) $\varphi_{x,y} = a_x,$ demnach 5) $\partial \varphi_x + \partial \varphi_y \cdot \partial y = \partial a_x,$

d. h., wenn man statt $\partial \varphi_x$ aus (3.) den Werth $-\pi_1 \cdot \partial \varphi_y$ substituirt,

6) $-\pi_1 + \partial y = \partial a_x \cdot \frac{1}{\partial \varphi_y}$

identisch, und zu gleicher Zeit, weil er der Differenzialgleichung $F = 0$ genügt, auch

7) $-\pi_1 + \partial y = 0,$

demnach auch

$$8)\quad \partial a_x \cdot \frac{1}{\partial \varphi_y} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{\partial \varphi_y} = 0,$$

weil nach der Voraussetzung ∂a_x nicht Null ist.

Um also aus dem allgemeinen Integral

$$f_{x,y,a} = 0$$

die singulären Werthe alle, ohne Ausnahme, zu finden, darf man nur das allgemeine Integral nach der willkührlichen Konstante a auflösen, so daß man

$$a = \varphi_{x,y}$$

erhält, und dann

$$\partial \varphi_y = \frac{1}{0} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\partial \varphi_y} = 0$$

setzen, nachher aber die daraus hervorgehenden Werthe y_x von y prüfen

1) ob sie der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ genügen, und, wenn dies der Fall ist,

2) ob sie, in das allgemeine Integral statt y gesetzt, a als eine Funktion von x liefern, oder ob sie x zugleich mit wegfallen lassen, durch einen (nach φ_x) konstanten Werth von a, welcher zu gleicher Zeit der letztern Gleichung genügt.

Nur wenn bei der letztern Prüfung a als eine Funktion von x sich ergiebt, ist der Werth ein singulärer; wird aber a als konstant gefunden, so ist die für y gefundene Funktion von x eines der besondern Integrale.

Von der Differenzialgleichung

$$1)\quad \partial y \cdot \sqrt{x^2+y^2-b} - y \cdot \partial y + x = 0$$

ist das allgemeine Integral

$$2)\quad x^2 - 2ay - a^2 - b = 0.$$

Löst man nun solches nach der willkührlichen Konstante a auf, so erhält man

$$3)\quad a = -y + \sqrt{x^2+y^2-b} = \varphi_{x,y'}$$

also

$$4)\quad \partial \varphi_y = -1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-b'}}$$

so daß die Gleichung

$$\frac{1}{\partial\varphi_y} = 0$$

dasmal in

$$5) \qquad x^2+y^2-b = 0$$

übergeht; und diese Gleichung (5.) bestätigt sich in der Prüfung als ein singulärer Werth der gegebenen Differenzialgleichung (1.).

V. Wenn wir aber so eben (in IV.) bewiesen haben, daß unter allen Werthen y_x von y, welche $\frac{1}{\partial\varphi_y} = 0$ oder $\partial\varphi_y = \frac{1}{0}$ machen, jeder existirende singuläre Werth mit begriffen seyn müsse; so folgt daraus gar nicht umgekehrt, daß jeder Werth, welcher $\frac{1}{\partial\varphi_y} = 0$ macht, auch nothwendig ein singulärer Werth ist, und deshalb ist in (IV.) die unter (Nr. 2.) angedeutete Prüfung nothwendig.

Die Differenzialgleichung z. B.

$$1) \quad y^2-b-xy\cdot\partial y = 0$$

hat zum allgemeinen Integral

$$2) \quad \sqrt{x^2+y^2-b} = ax.$$

Findet man nun hieraus

$$3) \quad a = \frac{\sqrt{x^2+y^2-b}}{x} = \varphi_{x,y}$$

und $$4) \quad \partial\varphi_y = \frac{y}{x\cdot\sqrt{x^2+y^2-b}};$$

so giebt die Gleichung $\frac{1}{\partial\varphi_y} = 0$ oder $\partial\varphi_y = \frac{1}{0}$ jetzt

$$5) \quad x^2+y^2-b = 0,$$

und doch enthält diese letztere Gleichung keinen singulären Werth, sondern ein besonderes Integral, welches für $a = 0$ aus dem allgemeinen Integral (2.) hervorgeht.

VI. Denkt man sich aus dem allgemeinen Integral

$$1) \qquad f_{x,y,a} = 0$$

zunächst $$2) \qquad \varphi_{x,y} = a$$

gefunden, so ist

$$3)\qquad f_{x,y,a} = 0$$

für jedes x und für jedes y identisch, sobald man sich unter a die Funktion $\varphi_{x,y}$ denkt. Also ist, unter derselben Voraussetzung, auch die Ableitung von (3.) nach allem y identisch $0 = 0$, d. h.

$$4)\quad \partial f_y + \partial f_a \cdot \partial \varphi_y = 0,$$

woraus $$5)\quad \frac{1}{\partial \varphi_y} = -\frac{\partial f_a}{\partial f_y} = -\partial f_a \cdot \frac{1}{\partial f_y}$$

folgt, wenn nur unter a die Funktion $\varphi_{x,y}$ gedacht wird.

Die Regel der (IV.) führt also auch noch zu folgender Regel: Um aus dem allgemeinen Integral $f_{x,y,a} = 0$ alle singulären Werthe, ohne Ausnahme, zu finden, eliminire man a

erstlich aus $f_{x,y,a} = 0$ und $\partial f_a = 0$;

damit aber keiner der singulären Werthe verloren gehe, so eliminire man noch a

zweitens aus $f_{x,y,a} = 0$ und $\frac{1}{\partial f_y} = 0$.

Alle die Werthe, welche aus den beiden Eliminationsgleichungen für y hervorgehen, prüfe man aber genau so wie in (IV.), einmal um zu wissen, ob sie überhaupt der gegebenen Differenzialgleichung genügen, und dann, um zu erfahren, ob sie singuläre Werthe oder besondere Integrale sind.

α) Giebt man daher dem allgemeinen Integral $f_{x,y,a} = 0$ eine solche Form, daß die Gleichung

$$\partial f_a = 0$$

gar keinen Werth für y liefern kann, oder einen Widerspruch enthält (wie dies z. B. der Fall ist, wenn

$$f_{x,y,a} = \varphi_{x,y} - a$$

genommen wird, wo man dann

$$\partial f_a = -1$$

findet); so erhält man alle existirenden singulären Werthe der gegebenen Differenzialgleichung, wenn man bloß aus

$$f_{x,y,a} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\partial f_y} = 0$$

die willkührliche Konstante a eliminirt *).

β) Wenn man aber dem allgemeinen Integral $f_{x,y,a} = 0$ eine solche Form giebt, daß $\frac{1}{\partial f_y} = 0$ gar keinen Werth für y giebt, oder einen Widerspruch enthält; so erhält man schon alle existirenden singulären Werthe, wenn man bloß aus

$$f_{x,y,a} = 0 \quad \text{und} \quad \partial f_a = 0$$

die willkührliche Konstante a eliminirt.

Dies letztere ist aber z. B. nothwendig der Fall, wenn man das allgemeine Integral nach y aufgelößt hat, so daß

$$f_{x,y,a} = y - \chi_{x,a}$$

genommen wird, weil dann

$$\partial f_y = 1, \quad \frac{1}{\partial f_y} = 1$$

wird, also $\frac{1}{\partial f_y} = 0$ gar nicht gedacht werden kann **).

Beispiel 1. Der Differenzialgleichung

1) $(-y+\sqrt{x^2+y^2-b})\cdot\partial y - x = 0$

kommt das allgemeine Integral

2) $x^2-2ay-a^2-b = 0$

zu. In dieser Form angesehen, ist

---

*) Dies stimmt genau mit dem überein, was sich in (IV.) gesagt findet; ja man kann sagen, dieses ist wiederum genau die Regel (IV.) etwas allgemeiner ausgesprochen.

**) Durch diese Nummer (VI.) ist eine Lehre vervollständigt, welche, wenn wir nicht irren, von Lagrange zuerst gegeben, nachher aber in allen Lehrbüchern in ihrer Unvollständigkeit aufgenommen worden ist. M. vgl. Leçons sur le calcul des fonctions p. Lagrange 1806. Leç. XIV. p. 180. 181. Die bisherige Unvollständigkeit dieser Lehre ist aber Ursache, daß fast alle Beweise des Lagrange in den Leç. XIV. XV. noch etwas zu wünschen übrig lassen.

3) $$f_{x,y,a} = x^2 - 2ay - a^2 - b,$$

also $$\partial f_y = -2a, \quad \frac{1}{\partial f_y} = -\frac{1}{2a}.$$

Die Gleichung $\frac{1}{\partial f_y} = 0$ enthält also dasmal einen Widerspruch, und die singulären Werthe sind dasmal bloß aus

4) $\partial f_a = -2y - 2a = 0$ d. h. $a = -y$

herzuholen, indem man aus dieser Gleichung und der (2.) a eliminirt, wodurch sich der singuläre Werth

5) $$x^2 + y^2 - b = 0$$

ergiebt.

Giebt man dem allgemeinen Integral (2.) die Form

6) $$(a+y)^2 - (x^2 + y^2 - b) = 0,$$

so ist jetzt

7) $$f_{x,y,a} = (a+y)^2 - (x^2 + y^2 - b)$$

und

8) $\partial f_a = 2(a+y)$, so wie 9) $\partial f_y = 2(a+y) - 2y = 2a$,

und die singulären Werthe werden wiederum aus $\partial f_a = 0$ gefunden.

Giebt man zuletzt dem allgemeinen Integral in (2.) die Form

10) $$a + y - \sqrt{x^2 + y^2 - b} = 0,$$

so ist dasmal

11) $$f_{x,y,a} = a + y - \sqrt{x^2 + y^2 - b}$$

und 12) $\partial f_a = 1$, so wie 13) $\partial f_y = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - b}}$.

Dasmal ergiebt sich daher der existirende singuläre Werth nicht aus $\partial f_a = 0$, aber wohl aus $\frac{1}{\partial f_y} = 0$.

Beispiel 2. Die Differenzialgleichung

1) $$y - x \cdot \partial y = n \cdot \sqrt{1 + \partial y^2}$$

hat zum allgemeinen Integral

2) $$y - ax - n \cdot \sqrt{1 + a^2} = 0.$$

Die Gleichung $\frac{1}{\partial f_y} = 0$ giebt jetzt nichts. Die Gleichung $\partial f_a = 0$ giebt dagegen jetzt $-x - \frac{na}{\sqrt{1+a^2}} = 0$ oder $a = \frac{x}{\sqrt{n^2 - x^2}}$.

Setzt man nun diesen Werth in (2.), so ergiebt sich, wenn man die Rechnung so führt, daß die Zweideutigkeit der Wurzeln gehörig beachtet wird,

$$y = \frac{x^2 \pm n^2}{\sqrt{n^2 - x^2}}.$$

Prüft man nun diese Werthe von y, so findet man, daß

nicht $y = \frac{x^2 + n^2}{\sqrt{n^2 - x^2}}$, wohl aber $y = \frac{x^2 - n^2}{\sqrt{n^2 - x^2}}$

der gegebenen Differenzialgleichung (4.) genügen. Werden dann diese letztern Werthe, nämlich

$$y = \sqrt{n^2 - x^2}$$

noch weiter geprüft, so findet sich, daß sie singuläre Werthe sind.

Beispiel 3. Ist das allgemeine Integral einer gegebenen Differenzialgleichung folgendes:

$$(x^2 + y^2 - b^2)(y - 2a)y + (x^2 - b^2)a^2 = 0$$

und a die willkührliche Konstante, so giebt $\frac{1}{\partial f_y} = 0$ offenbar nichts; dagegen giebt $\partial f_a = 0$, wenn man aus ihr und dem allgemeinen Integral die Konstante a eliminirt,

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0 \quad \text{und} \quad y = 0.$$

Aber alle diese Werthe sind nicht singuläre Werthe, sondern besondere Integrale, welche aus dem allgemeinen Integral für $a = 0$ hervorgehen, wie die nöthige Prüfung ergiebt.

VII. Daß, wenn a als eine Funktion von x genommen ist, welche

$$\partial f_a = 0$$

macht, dann der aus $f_{x,y,a} = 0$ und $\partial f_a = 0$ durch Elimination von a entstehende Werth y_x von y, der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ genügen müsse, kann man auch noch a posteriori nachweisen. Es ist nämlich, je nachdem in

1) $$f_{x,y,a} = 0$$

a konstant oder als eine Funktion von x gedacht ist, das Differenzial dieser Gleichung (1.)

im erstern Fall 2) $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0$,

im andern Fall 3) $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x + \partial f_a \cdot \partial a_x = 0$;

folglich ist, weil $\partial f_a = 0$ ist, dieses Differenzial im andern Fall, der Form nach, genau dasselbe, wie im erstern Fall. Da nun die aus (1. und 2.) für y und ∂y gezogenen Werthe, wenn sie in die gegebene Differenzialgleichung

4) $$F_{x,y,y_1} = 0$$

gesetzt werden, letztere identisch machen, so daß sich sowohl x als auch a von selbst weghebt (nach §. 269. I.); so wird dies offenbar auch der Fall seyn, wenn man aus (1. u. 3.) y und ∂y findet, weil für sie, der Form nach, genau dieselben Ausdrücke in x und a gefunden werden (so lange $\partial f_a = 0$ ist), und bei dem Wegheben des a es ganz einerlei ist, ob a eine Konstante oder selber wieder eine Funktion von x vorstellt *).

VIII. Jeder Differenzialgleichung

1) $$F_{x,y,y_1} = 0$$

kann man allemal eine solche Form geben, daß, wenn man sie auf's neue differenziirt, so daß man

2) $\partial F_{(x)} = 0$ d. h. $\partial F_x + \partial F_y \cdot y_1 + \partial F_{y_1} \cdot y_2 = 0$ **)

als Differenzialgleichung der 2ten Ordnung erhält, diese Gleichung (2.) unmittelbar in zwei Faktoren zerfällt und zwar die Form

3) $$U_{x,y,y_1} \cdot (P_{x,y,y_1} + Q_{x,y,y_1} \cdot y_2) = 0$$

annimmt; so daß $U = 0$ und $F = 0$, durch Elimination von y_1 mit einander verbunden, die Gleichung $V_{x,y} = 0$ liefern, welche nothwendig alle existirenden singulären Werthe in sich schließt.

---

*) Dies ist die in der Note zur vorigen Nummer (VI.) erwähnte Ansicht des Lagrange. In der Nummer (VI.) ist aber mehr geschehen als hier in (VII.). Dort in (VI.) kam es nämlich darauf an, 1) aus jeder Form des allgemeinen Integrals mit Sicherheit alle singulären Werthe zu finden; 2) die Form genau nachzuweisen und besonders die Möglichkeit derselben, welche erlaubt, daß bereits $\partial f_a = 0$ jeden singulären Werth liefert. Diese Vorzüge scheint unsre vorhergehende Darstellung zu haben.

**) Die Zeichen y_1, y_2, y_3, y_4 ꝛc. stehen hier und in der Folge noch oft, um die Ableitungen $\partial y_x, \partial^2 y_x, \partial^3 y_x, \partial^4 y_x$ ꝛc. vorzustellen.

Um dies zu beweisen, denke man sich das allgemeine Integral

4) $$f_{x,y,a} = 0$$

in eine solche Form gebracht, daß man alle singulären Werthe erhält, so oft aus

5) $$f_{x,y,a} = 0 \quad \text{und} \quad \partial f_a = 0$$

a selbst eliminirt wird, welches nach (VI. β.) allemal möglich ist. In welcher Form man sich aber dieses allgemeine Integral (4.) denken mag; so erhält man doch immer die Differenzialgleichung (1.), wenn man aus

6) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y = 0 \quad \text{oder} \quad \partial f_x + \partial f_y \cdot y_1 = 0$$

diese andere Gleichung zieht

7) $$a = \varphi_{x,y,y_1}$$

und dann diesen Werth statt a in $f_{x,y,a} = 0$ substituirt (nach §. 269. I.). Also kann man die gegebene Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ allemal auf die Form gebracht sich denken

8) $f_{x,y,a} = 0$, unter a die Funktion φ_{x,y,y_1} gedacht.

Ist aber die gegebene Differenzialgleichung in dieser Form (8.) geschrieben, so reduzirt sich ihr Differenzial

9) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_a \cdot \partial \varphi_{(x)} = 0,$$

wegen der (6. u. 7.) bloß auf

10) $\partial f_a \cdot \partial \varphi_{(x)} = 0$, unter a die Funktion φ_{x,y,y_1} gedacht.

Dieses ist aber die Form der (3.), in so fern $[\partial f_a]_\varphi$ bloß x,y,y_1, dagegen $\partial \varphi_{(x)} = \partial \varphi_x + \partial \varphi_y \cdot y_1 + \partial \varphi_{y_1} \cdot y_2$ auch noch y_2 d. h. $\partial^2 y$ enthält.

Nimmt man nun, um der Gleichung der 2ten Ordnung in (10.) zu genügen, $\partial f_a = 0$, d. h. $[\partial f_a]_\varphi = 0$; so erhält man, wenn man aus dieser Gleichung und der Gleichung (8.) y_1 eliminirt, weil solches y_1 nirgends als nur in φ (d. h. in a) vorkommt, offenbar dieselbe Gleichung $V_{x,y} = 0$, welche die in (5.) angegebene Elimination liefert. Demnach bekommt man auf diesem Wege alle singulären Werthe, welche $F = 0$ haben kann.

Genügt man aber derselben Gleichung (10.) der 2ten Ordnung dadurch, daß man den andern Faktor

$$\partial f_{(x)} = 0$$

nimmt; so kann man nun nach (§. 266.) weiter fortfahren, und zu $F = 0$ das allgemeine Integral suchen *).

Beispiel. Von der gegebenen Differenzialgleichung

1) $(-y+\sqrt{x^2+y^2-b}) : \partial y - x = 0$

ist 2) $x^2-2ay-a^2-b = 0$

das allgemeine Integral. Differenziirt man letzteres, so erhält man

3) $x-a\cdot\partial y = 0$ oder $a = \frac{x}{\partial y} = \varphi_{x,y,y_1}$.

Setzt man diesen Werth statt a in (2.), so erhält man

4) $x^2-2y\cdot\frac{x}{\partial y} - \frac{x^2}{\partial y^2} - x = 0$,

welche Gleichung dieselbe Differenzialgleichung (1.) ist, jedoch in derjenigen Form, in welcher ihr unmittelbares Differenzial sich in die oben gedachten zwei Faktoren zerlegen läßt **). Differenziirt man nämlich die (4.), so erhält man

---

*) Die Gleichung $\partial\varphi_{(x)} = 0$ führt zur Gleichung $\varphi = \text{Const}$, d. h. $\varphi = a$, welches eine Gleichung der 1sten Ordnung ist, mit einer willkührlichen Konstante a, die der Gleichung der 2ten Ordnung $\partial\varphi_{(x)} = 0$ genügt. Eliminirt man nun aus dieser Gleichung der 1sten Ordnung und aus der gegebenen Gleichung der 1sten Ordnung $F = 0$, nachdem man sich letztere in der Form (8.) dargestellt denkt, die Ableitung y_1, welche wiederum nur in φ vorkommt; so erhält man offenbar als Resultat der Elimination die Gleichung

$f_{x,y,a} = 0$, wo a eine willkührliche Konstante ist.

Und der andere Faktor $\partial\varphi_{(x)} = 0$ in (10.) führt also auch auf diesem Wege zum allgemeinen Integral.

Uebrigens verdanken wir den Inhalt dieser Nummer (VIII.), so wie so vieles, dem Lagrange, welcher zuerst den hier betretenen Weg nachgewiesen hat

**) Löst man die Gleichung (4.) nach ∂y auf, so wird man bald zur (1.) gelangen.

$$5)\quad x-\frac{y}{\partial y}-x+\frac{xy\cdot\partial^2 y}{\partial y^2}-\frac{x}{\partial y^2}+\frac{x^2\cdot\partial^2 y}{\partial y^3}=0,$$

und diese Gleichung reduzirt sich auf

$$6)\quad \left(\frac{y}{\partial y}+\frac{x}{\partial y^2}\right)\cdot\left(\frac{x\cdot\partial^2 y}{\partial y}-1\right)=0.$$

Nimmt man nun den erstern Faktor

$$7)\quad \frac{y}{\partial y}+\frac{x}{\partial y^2}=0 \quad \text{oder} \quad y\cdot\partial y+x=0,$$

und eliminirt man daraus und aus (1.) die Ableitung ∂y; so erhält man

$$8)\quad x^2+y^2-b=0,$$

welche Gleichung alle singulären Werthe der (1.) in sich schließt.

IX. Aus der (VIII.) folgt aber, was so sehr wichtig ist, nämlich daß jeder singuläre Werth von $F_{x,y,y_1}=0$ die aus letzterer nach (§. 266.) für $\partial^2 y$ gefundene Funktion $(\pi_2)_{x,y}$ nothwendig auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen muß *), daß also das Verfahren (I. und II.) alle singulären Werthe liefert, welche eine gegebene Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1}=0$ haben kann.

X. Wir haben in (VIII.) gesehen, daß, wenn

$$1)\quad f_{x,y,a}=0$$

das allgemeine Integral einer gegebenen Differenzialgleichung

$$2)\quad F_{x,y,y_1}=0$$

der 1sten Ordnung ist, dann dieselbe Form

---

*) In dem Falle der (I.), wo schon die gegebene Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1}=0$ die Form $V_{x,y}\cdot(M_{x,y}+N_{x,y}\cdot\partial y)=0$ hat, findet sich die Gleichung der 2ten Ordnung

$$V\cdot[\partial M_x+(\partial M_y+\partial N_x)\cdot\partial y+\partial N_y\cdot\partial y^2+N\cdot\partial^2 y]+\partial V_{(x)}\cdot(M+N\cdot\partial y)=0$$

wo die Werthe, welche $V=0$ machen, auch $\partial V_{(x)}=0$ machen; so daß diese Gleichung der 2ten Ordnung, nach $\partial^2 y$ aufgelößt, den Ausdruck dafür gewiß auch in der Form $\frac{0}{0}$ giebt, so oft statt y einer der aus $V=0$ gezogenen Werthe gesetzt wird.

3) $$f_{x,y,a} = 0$$

auch diese Differenzialgleichung (2.) selber vorstelle, sobald man in (3.) unter

4) a die Funktion φ_{x,y,y_1}

versteht, welche aus

5) $\partial f_{(x)} = 0$ d. h. $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y = 0$

für a hervorgeht, wenn man letztere nach a auflößt.

Hat man nun aus $F = 0$ (in 2.) gefunden (nach §. 266.)

6) $\partial y = (\pi_1)_{x,y}$ oder $y_1 = (\pi_1)_{x,y}$;

so ist, wenn man diesen Werth für ∂y (d. h. für y_1) in (3.) subſtituirt,

7) $$f_{x,y,a} = 0$$

nach x und auch nach y identisch, wenn man nur unter a die Funktion φ_{x,y,y_1} (aus 4.) und zu gleicher Zeit unter y_1 die Funktion $(\pi_1)_{x,y}$ aus (6.) versteht. Daher ist denn auch die Ableitung von (7.) nach y identisch, d. h.

8) $\partial f_y + \partial f_a \cdot (\partial \varphi_y + \partial \varphi_{y_1} \cdot \partial (\pi_1)_y) = 0$,

also

9) $$\partial (\pi_1)_y = \frac{-\frac{\partial f_y}{\partial f_a} - \partial \varphi_y}{\partial \varphi_{y_1}},$$

wenn nur unter a die Funktion φ_{x,y,y_1} aus (4.) verstanden wird.

Da man nun dem allgemeinen Integral (1.) nach (VI. β.) allemal die Form geben kann, daß jeder singuläre Werth den Quozienten ∂f_y nicht zu Null, aber $\partial f_a = 0$ macht, wenn unter a der aus $f_{x,y,a} = 0$ gezogene Werth $a = \psi_{x,y}$ verstanden wird; da wir ferner in (VIII.) eingesehen haben, daß dann jeder singuläre Werth auch $\partial f_a = 0$ macht, wenn unter a nicht mehr $\psi_{x,y}$ sondern φ_{x,y,y_1} verstanden wird, so folgt:

daß jeder singuläre Werth von $F_{x,y,y_1} = 0$ die Ableitung $\partial (\pi_1)_y$ auf die Form $\frac{1}{0}$ bringt, oder $\frac{1}{\partial (\pi_1)_y} = 0$ macht,

wenn nur $(\pi_1)_{x,y}$ die Funktion von x und y vorstellt, welche man aus der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ erhält, wenn man solche nach y_1 auflößt.

Daher die neue Regel; um die singulären Werthe von $F = 0$ aus der Differenzialgleichung $F = 0$ selbst zu finden: „Man „löse $F = 0$ nach y_1 auf, so daß $y_1 = p_{x,y}$ gefunden wird; „man setze

$$(\odot) \cdots \quad \partial p_y = \frac{1}{0}, \text{ oder } \frac{1}{\partial p_y} = 0;$$

„man prüfe endlich alle aus dieser letztern Gleichung für y her„vorgehenden Werthe, einmal, ob sie der gegebenen Differenzial„gleichung genügen, und dann, ob sie singuläre Werthe oder be„sondere Integrale sind."

Für die letztere Prüfung haben wir bis jetzt kein anderes Mittel angegeben als das (I. 4.) beschriebene, welches die Kenntniß des allgemeinen Integrals voraussetzt. Die nächste Nummer (XI.) wird dagegen zeigen, daß, wenn die Werthe nach dieser Regel gefunden werden, diese letztere Prüfung überflüssig ist.

Beispiel. Die gegebene Differenzialgleichung

1) $(x \cdot \partial y - y) \cdot (x \cdot \partial y - 2y) + x^3 = 0$

giebt, wenn sie nach ∂y aufgelößt wird,

2) $\partial y = \frac{3y \pm \sqrt{y^2 - 4x^3}}{2x}$,

so daß jetzt π_1 oder

3) p den Ausdruck $\frac{3y \pm \sqrt{y^2 - 4x^3}}{2x}$ vorstellt.

Demnach wird jetzt $\partial(\pi_1)_y$ oder

4) $\partial p_y = \frac{3 \cdot \sqrt{y^2 - 4x^3} \pm y - 6x^2}{2x \cdot \sqrt{y^2 - 4x^3}}$.

Also giebt die Gleichung $(\odot)$ jetzt

5) $y^2 - 4x^3 = 0$.

Diese aus (5.) hervorgehenden Werthe für y, genügen in der That der gegebenen Differenzialgleichung (1.), und sind dabei in deren allgemeinem Integral

6) $y - ax - \frac{x^2}{a} = 0,$

wie solches nach (§. 266.) gefunden wird, für einen konstanten Werth von a nicht enthalten.

XI. Dieser in (X.) aufgestellte Satz läßt sich auch umkehren, d. h. es gilt auch dieser andere Satz:

Wenn aus

1) $F_{x,y,y_1} = 0$

gefunden ist

2) $y_1 = p_{x,y}$,

und wenn dann ein aus der Gleichung

3) $\frac{1}{\partial p_y} = 0,$ oder $\partial p_y = \frac{1}{0}$

gezogener Werth

4) $y = \psi_x$

der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ genügt; so ist dieser Werth nie ein besonderes Integral, sondern allemal ein singulärer Werth von $F = 0$.

Denn es sey das allgemeine Integral von $F = 0$ durch

5) $y = V_{x,a}$

wo a die willkührliche Konstante ist, vorgestellt, so folgt nach den Voraussetzungen, daß, wenn man entweder ψ_x aus (4.), oder $V_{x,a}$ aus (5.), statt y in (2.) subsstituirt, diese letztere Gleichung (2.) allemal identisch wird, so daß man hat

4) $\partial\psi_x = p_{x,\psi}$

und 5) $\partial V_x = p_{x,V}$,

also auch 6) $\partial V_x - \partial\psi_x = p_{x,V} - p_{x,\psi}$ d. h. $\partial(V_{x,a} - \psi_x)_x = p_{x,V} - p_{x,\psi}$,

als Gleichungen, welche nach x und nach a identisch sind.

Wäre nun $y = \psi_x$ ein besonderes Integral, so wäre solches in dem allgemeinen Integral enthalten, d. h. man könnte der willkührlichen Konstante a einen bestimmten konstanten Werth α geben, so daß identisch

7) $V_{x,a} = \psi_x$

würde. Setzte man nun noch

8) $a-\alpha = h$ oder $a = \alpha+h$;

so würde die Gleichung (6.) jetzt die Form

9) $\partial(V_{x,\alpha+h}-V_{x,\alpha})_x = P_{x,V} - P_{x,\psi}$

annehmen, wo zur Rechten V den Ausdruck $V_{x,\alpha+h}$, ψ dagegen den andern $V_{x,\alpha}$ vorstellt, und diese Gleichung würde (nach x und) nach h identisch seyn. Da nun $V_{x,\alpha+h}-V_{x,\alpha}$ für $h = 0$ selber Null wird, so muß sich dieser Ausdruck nach steigenden ganzen oder gebrochenen, aber lauter positiven Potenzen von h entwickeln lassen, so daß man hat, wenn

10) $V_{x,\alpha+h}-V_{x,\alpha}=k$, also $V_{x,\alpha+h}=V_{x,\alpha}+k$, d. h. $V=\psi+k$

gesetzt wird,

11) $k = V_1 \cdot h^m + V_2 \cdot h^n + \cdots$,

also daß der Ausdruck zur Linken in (9.), nämlich

12) $\partial(V_{x,\alpha+h}-V_{x,\alpha})_x = \partial(V_1)_x \cdot h^m + \partial(V_2)_x \cdot h^n + \cdots$

wird. Der Ausdruck zur Rechten in (9.) geht aber nun nach (10.) über in

$$P_{x,\psi+k}-P_{x,\psi};$$

wird für $k = 0$ selber Null; läßt sich also auch nach positiven und steigenden Potenzen von k entwickelt denken, so nämlich, daß man hat

13) $P_{x,V} - P_{x,\psi} = P_1 \cdot k^\mu + P_2 \cdot k^\nu + \cdots$,

wo aber, weil schon $[\partial p_y]_\psi$ die Form $\frac{1}{0}$ annimmt (nach der Voraussetzung in 3.), der kleinste Exponent μ kleiner als die Einheit seyn muß (nach §. 101. d. IV. Th. d. S.).

Setzt man nun in (13.) statt k seinen Werth aus (11.), so erhält man eine nach steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe, deren erstes Glied $P_1 \cdot V_1^m \cdot h^{\mu m}$ ist, also daß die (13.) in

14) $P_{x,V} - P_{x,\psi} = P_1 \cdot V_1^m \cdot h^{\mu m} + \cdots$

übergeht. Substituirte man aber nun diese Reihen zur Rechten in (12. u. 14.) als Werthe ihrer Ausdrücke zur Linken, statt der letztern in die Gleichung (9.); so müßten diese beiden nach positiven steigenden Potenzen von h fortlaufenden Reihen einander gleich seyn für jedes h, also auch in ihren einzelnen Gliedern beziehlich zusammenfallen. Weil jedoch die eine Reihe mit h^m, die andere dagegen mit $h^{\mu m}$ anfängt, und dabei $\mu < 1$, also $\mu m < m$ ist; so ist eine solche Uebereinstimmung, auch nur

dieser ersten Glieder, nie möglich. Die Voraussetzung, daß $y = \psi_x$ für einen besondern konstanten Werth α von a in dem allgemeinen Integral als ein besonderes enthalten sey, führt demnach zu einem Widerspruch, und ist nicht zuzulassen. Also ist $y = \psi_x$ bloß ein singulärer Werth *).

Wenn daher Werthe y_x von y dadurch gefunden worden sind, daß man

$$3) \quad \frac{1}{\partial p_y} = 0, \quad \text{oder} \quad \partial p_y = \frac{1}{0}$$

gesetzt hat; so braucht man bloß zu prüfen, ob solche der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ genügen. Ist dies letztere der Fall, so sind es allemal singuläre Werthe, während man aus (X.) weiß, daß die Gleichung (3.) auch alle existirenden singulären Werthe liefert.

Der Weg (X.) ist daher, unter den bisher entwickelten, der einzige, welcher aus der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$, und ohne daß das allgemeine Integral bekannt zu seyn braucht, nicht bloß alle singulären Werthe liefert, sondern auch die Ueberzeugung, daß von den erhaltenen Werthen keiner ein besonderes Integral seyn könne.

XII. Wir haben in den Nummern (I. u. II.) zwei verschiedene Arten von singulären Werthen kennen gelernt, welche der Differenzialgleichung $F = 0$ genügen, ohne in deren allgemeinen Integral als besondere Integrale enthalten zu seyn; wir haben in der Nummer (IX.) erkannt, daß diese Differenzialgleichung der ersten Ordnung $F_{x,y,y_1} = 0$ außer den nach (I. u. II.)

---

*) Man wird zu diesem Beweis geführt, wenn man sich die Aufgabe stellt: „Aus einem besondern Integral $y = \psi_x = V_{x,\alpha}$ das allgemeine $y = V_{x,\alpha+h}$, wo h die willkührliche Konstante vorstellen kann, zu finden," bei deren Auflösung man zu den obigen Reihen seine Zuflucht nehmen muß. So haben Euler und Laplace dieses Kennzeichen der singulären Werthe aufgefunden. — Die hier gewählte Form verbindet Strenge mit größerer Deutlichkeit.

gefundenen keine weiteren singulären Werthe mehr haben kann, und daß die Methode der Nummer (II.), nämlich $\partial^2 y = \frac{0}{0}$ zu setzen, beide Arten singulärer Werthe liefert; wir haben in den Nummern (X. u. XI.) erkannt, daß man genau alle singulären Werthe und darunter kein besonderes Integral erhält, wenn man, nachdem aus der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$

$$y_1 = (\pi_1)_{x,y} \quad \text{oder} \quad \partial y = p_{x,y}$$

gefunden worden ist, dann

$$\partial p_y = \frac{1}{0} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\partial p_y} = 0$$

setzt; wir haben in den Nummern (III. IV. V. VI. und VII.) gezeigt, wie die singulären Werthe mit Sicherheit aus dem allgemeinen Integral genommen werden können, indem man die willkührliche Konstante als eine Funktion von x sich denkt *): jetzt bleibt uns also nur noch übrig nachzuweisen, wie die in (I. und II.) gefundenen beiden Arten von singulären Werthen, im Wesentlichen in eine und dieselbe Art zusammenfallen.

Schon Legendre hat gezeigt, daß die Gleichung

$$x + y \cdot \partial y = \partial y \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

wenn man einen neuen Veränderlichen u einführt, gegeben durch die Gleichung

---

*) Nicht von x und y. Eine Funktion von x und y, wenn y selber wieder eine Funktion von x vorstellt, ist nicht immer, nach allem x angesehen, wirklich und unbedingt eine Funktion von x, sondern kann in der That in eine bloße Konstante übergehen. Gesetzt, man hätte die Funktion von x und y

$$1) \quad \frac{\sqrt{x^3 - y^2 + b}}{x},$$

und y bedeutete die aus der Gleichung

$$2) \quad x^3 - y^2 + b - ax^2 = 0$$

für y hervorgehende Funktion von x; so würde, wenn man diesen Werth statt y in (1.) setzte, der Ausdruck (1.) bloß in $\sqrt{a}$ übergehen, also in der That gar kein x enthalten, d. h. nach x konstant seyn.

$$x^2+y^2-a^2 = u^2,$$

so daß $x+y\cdot\partial y_x = u\cdot\partial u_x$

wird, die Form $u\cdot(\partial u_x-\partial y_x) = 0$ oder $u\cdot(\partial u_y-1) = 0$ annimmt, und in dieser Form identisch wird,

wenn $\partial u_y-1=0$, also $u-y=a$, d. h. $\sqrt{x^2+y^2-b}-y=a$,

aber auch wenn $u=0$ d. h. $x^2+y^2-b=0$ ist.

Dieses letztere ist aber der nach (I.) zu findende singuläre Werth, während derselbe, wenn man den neuen Veränderlichen u nicht einführt, aus der gegebenen Differenzialgleichung erst nach (II.) gefunden wird.

Poisson hat diese Bemerkung verallgemeinert und nachgewiesen: „Jede Differenzialgleichung der ersten Ordnung läßt sich „durch Einführung eines neuen Veränderlichen allemal so umformen, daß die singulären Werthe alle als zur ersten (in I. „besprochenen) Art gehörig erscheinen, d. h. als Faktoren der „gegebenen Differenzialgleichung selbst, welche keine Ableitung „enthalten."

Ist nämlich

1) $$y = \psi_x$$

ein singulärer Werth der gegebenen und auf die Form

2) $$\partial y = P_{x,y}$$

gebrachten Differenzialgleichung, so ist identisch

3) $$\partial\psi = P_{x,\psi}.$$

Also läßt sich die gegebene Differenzialgleichung (2.) auch so schreiben

4) $$\partial(y-\psi) = P_{x,y}-P_{x,\psi}$$

oder auch so

5) $$\partial z = P_{x,\psi+z}-P_{x,\psi},$$

wenn 6) $y-\psi = z$, also $y = \psi+z$

gesetzt wird. Weil aber nach (XI.) der Ausdruck zur Rechten in (5.) allemal in eine steigende, nach positiven Potenzen von z fortlaufende Reihe

$$P_1 \cdot z^\mu + P_2 \cdot z^\nu + \cdots \quad \text{oder} \quad z^\mu \cdot (P_1 + P_2 \cdot z^{\nu-\mu} + \cdots),$$

wo aber $\mu < 1$ ist, verwandelt werden kann; so wird, wenn man

7) $$P_1 + P_2 \cdot z^{\nu-\mu} + \cdots = Q_{x,z}$$ setzt,

die gegebene Differenzialgleichung von der Form (5.) zu der Form

8) $$\partial z = Q_{x,z} \cdot z^\mu, \quad \text{wo} \quad \mu < 1 \quad \text{ist},$$

übergehen, oder in die Form

9) $z^\mu \cdot (z^{-\mu} \cdot \partial z - Q_{x,z}) = 0$ *), wo $Q_{x,z} = P_1$ wird für $z = 0$.

Wird nun

10) $z^{-\mu} \cdot \partial z = \partial u$, also $\frac{z^{1-\mu}}{1-\mu} = u$, mithin $z = (1-\mu) \cdot u^{\frac{1}{1-\mu}}$

gesetzt, so geht $Q_{x,z}$ über in

11) $$Q_{x,z} = P_1 + P_2 \cdot (1-\mu)^{\nu-\mu} \cdot u^{\frac{\nu-\mu}{1-\mu}} + \cdots = R_{x,u},$$

und die gegebene Differenzialgleichung von der Form (9.) über in

12) $(1-\mu)^\mu \cdot u^{\frac{\mu}{1-\mu}} \cdot (\partial u - R_{x,u}) = 0$, wo $R_{x,u} = P_1$ wird für $u = a$.

In dieser Form wird also der gegebenen Differenzialgleichung genügt, nicht bloß durch

13) $$\partial u - R_{x,u} = 0,$$

sondern auch durch $u^{\frac{1-\mu}{\mu}} = 0$ d. h., weil $\mu < 1$, also $\frac{1-\mu}{\mu}$ immer positiv ist, durch

14) $u = 0$, d. h. $z = 0$, d. h. $y - \psi_x = 0$,

---

*) Daß man diese Gleichung (8.) nicht durch z^μ wegdividiren dürfe, also daß man nicht aus (8.) ableiten dürfe

$$(\mathbb{C}) \qquad z^{-\mu} \cdot \partial z = Q_{x,z}$$

lehrt die im (I. Th. d. S. §. 96.) bereits gegebene, so höchst wichtige Regel, weil z, also auch z^μ gerade Null seyn könnte. Dies ist hier in der That der Fall, so oft für y der singuläre Werth ψ_x gesetzt wird, weil dann $z = y - \psi_x = \psi_x - \psi_x = 0$ wird. Erlaubte man sich daher durch z^μ die (8.) zu dividiren, und die ($\mathbb{C}$) daraus abzuleiten; so würde der singuläre Werth dadurch gerade ganz unbeachtet verloren gehen.

so daß in die Augen fällt, wie jetzt dieser Faktor $u^{\frac{\mu}{1-\mu}} = 0$ gerade den singulären Werth $y = \psi_x$ liefert, dagegen dem andern Faktor in (13.) nicht genügt.

Jeder singuläre Werth einer gegebenen Differenzialgleichung der 1sten Ordnung, ist daher dem Wesen nach nur von der in (I.) beschriebenen Art, weil jeder der nur mittelst der (II.) zu findenden singulären Werthe, nach der Umformung der gegebenen Differenzialgleichung mittelst eines neuen Veränderlichen, sich jedesmal ebenfalls als einer der ersten Art ausweißt.

XIII. Uebrigens läßt sich derselbe Satz der Nummer (XII.) einfacher noch wie folgt ableiten. Ist $\partial y = p_{x,y}$ die gegebene Differenzialgleichung und $y = \varphi_{x,a}$ ihr allgemeines Integral, so hat man die nach x und nach a identische Gleichung

$$(\mathfrak{C}) \cdots \quad \partial\varphi_x = p_{x,\varphi}.$$

Führt man nun einen neuen Veränderlichen z so ein, daß

$$y = \varphi'_{x,z}$$

ist, wo $\varphi'_{x,z}$ von $\varphi_{x,a}$ nur dadurch unterschieden seyn soll, daß dort z steht, wo hier a; so hat man auch noch

$$\partial y = \partial\varphi'_x + \partial\varphi'_z \cdot \partial z_x.$$

Setzt man nun diesen Werth statt ∂y in die gegebene Differenzialgleichung $\partial y = p_{x,y}$; so erhält man dieselbe Differenzialgleichung in dieser neuen Form

$$\partial\varphi'_x + \partial\varphi'_z \cdot \partial z_x = p_{x,\varphi'},$$

welche sich jedoch wegen der Gleichung ($\mathfrak{C}$) (die für jedes a, also auch wenn z statt a gesetzt wird, identisch ist, die also auch in $\partial\varphi'_x = p_{x,\varphi'}$ übergeht) auf

$$(\odot) \cdots \quad \partial\varphi'_z \cdot \partial z_x = 0$$

zurückzieht. In dieser neuen Form der gegebenen Differenzialgleichung, wo z an die Stelle des y getreten ist, giebt nun der erste Faktor, wenn er der Null gleich gesetzt wird, nothwendig alle singulären Werthe, weil diese Gleichung

$$\partial\varphi'_z = 0 \quad \text{mit} \quad y = \varphi'_{x,z}$$

durch Elimination von z verknüpft werden muß, wenn man nicht z, sondern das ursprüngliche y in x ausgedrückt haben will. Denselben Werth y in x erhält man aber offenbar, ob man z aus

$$\partial\varphi'z = 0 \quad \text{und} \quad y = \varphi'_{x,z},$$

oder ob man a aus

$$\partial\varphi_a = 0 \quad \text{und} \quad y = \varphi_{x,a}$$

eliminirt, während die letztere Elimination nach (VI. β.) nothwendig alle singulären Werthe der gegebenen Differenzialgleichung liefert *).

XIV. Aus dieser letztern Deduktion geht aber noch hervor:

α) Da jede beliebige Differenzialgleichung der ersten Ordnung $F = 0$ allemal ein allgemeines Integral

$$1) \qquad y = \varphi_{x,a}$$

mit einer willkührlichen Konstante a wirklich hat; da man demnach allemal einen neuen Veränderlichen z durch die Gleichung

$$2) \qquad y = \varphi_{x,z}$$

so einführen kann, daß $F = 0$ in die Form

$$3) \qquad \partial\varphi_z \cdot \partial z_x = 0$$

übergeht: so folgt,

daß, so oft $\partial\varphi_z$ den Buchstaben z (oder $\partial\varphi_a$ den Buchstaben a) wirklich enthält, so daß die Gleichung

---

*) Der andere Faktor der Gleichung ($\odot$),

nämlich $\partial z_x = 0$

giebt $z = a$ zum allgemeinen Integral.

Will man dieses allgemeine Integral wiederum in y ausdrücken; so muß man aus $z = a$ und $y = \varphi_{x,z}$ den neuen Veränderlichen z wiederum eliminiren, und da erhält man sogleich

$$y = \varphi_{x,a}$$

zum Resultat, welches das angenommene allgemeine Integral ist.

4) $$\partial\varphi_z = 0$$

z wirklich als Funktion von x, oder doch z = Constante liefert, dann dieser Werth von z, also auch der aus (2. und 4.) durch Elimination von z (oder aus $y = \varphi_{x,a}$ und $\partial\varphi_a = 0$ durch Elimination von a) hervorgehende Werth y_x von y, der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ wirklich genügen müsse.

β) In dem Falle also, daß die singulären Werthe nach der Regel (VI. β.) gefunden werden sollen, ist die Prüfung, ob die aus $f_{x,y,a} = 0$ und $\partial f_a = 0$ hervorgehenden Werthe von y der $F = 0$ auch wirklich genügen, überflüssig.

γ) Weil aber nach (VIII.) der Werth von y (in x), welcher den aus $F = 0$ und $\partial F_{(x)} = 0$ zu findenden Werth

$$\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y}$$

auf die Form $\frac{0}{0}$ bringt, allemal derjenige ist, welcher auch aus

$$y = \varphi_{x,a} \quad \text{und} \quad \partial\varphi_a = 0$$

durch Elimination von a hervorgeht; so folgt zu gleicher Zeit, daß, wenn man die singulären Werthe nach der Regel (II.) findet, d. h. dadurch, daß man $\partial^2 y = \frac{0}{0}$ macht, die besondere Prüfung, ob dieser Werth auch der $F = 0$ genüge, ebenfalls unnöthig wird.

XV. Nach der Nummer (XII.) ist es möglich, beliebig viele Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zu finden, welche einen und denselben beliebig gegebenen singulären Werth haben.

Ist nämlich

1) $$V_{x,y} = 0$$

der gegebene singuläre Werth: so nehme man eine ganz beliebige Differenzialgleichung der 1sten Ordnung

2) $$M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y = 0,$$

welcher durch $V = 0$ nicht genügt wird; multiplizire beide Gleichungen (1. und 2.) mit einander, so daß man

3) $$V \cdot M + V \cdot N \cdot \partial y = 0$$

erhält; und führe zuletzt einen neuen Veränderlichen z so ein, daß der gemeinschaftliche Faktor V als solcher verschwindet (jedoch ohne durch ihn wegzudividiren). Dieser neue Veränderliche z sey aber durch die Gleichung

4) $$y = \psi_{x,z}$$

eingeführt, wo $\psi_{x,z}$ eine noch unbekannte und zu bestimmende Zusammensetzung aus x und z ist. Dann hat man

5) $$\partial y = \partial \psi_x + \partial \psi_z \cdot \partial z,$$

und die Gleichung (3.) nimmt hierdurch diese andere Form an, nämlich

6) $$V_{x,\psi} \cdot (M_{x,\psi} + N_{x,\psi} \cdot \partial \psi_x) + V_{x,\psi} \cdot N_{x,\psi} \cdot \partial \psi_z \cdot \partial z = 0.$$

Denkt man sich nun zwei beliebige Funktionen $R_{x,\psi}$ und $S_{x,\psi}$ von x und ψ, welche nicht Null werden, wenn $V_{x,\psi} = 0$ wird, und setzt man nun

7) $$V_{x,\psi} \cdot (M_{x,\psi} + N_{x,\psi} \cdot \partial \psi_x) = R_{x,\psi}$$

und

8) $$V_{x,\psi} \cdot N_{x,\psi} \cdot \partial \psi_z = S_{x,\psi};$$

so hat man die beiden Gleichungen, woraus ψ in x und z ausgedrückt gefunden werden muß, um die Gleichung (4.) so bestimmt zu haben, daß die neue Form der Differenzialgleichung jetzt

9) $$R + S \cdot \partial z = 0$$

wird, so daß jetzt $\partial z = -\frac{R}{S}$ nicht die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wenn der aus $V_{x,\psi} = 0$ für z gefundene singuläre Werth z_x statt z gesetzt wird. Der existirende singuläre Werth der Gleichung (3.) wird also nun aus dieser neuen Form (9.) derselben, nicht mehr nach (I.) gefunden, und erscheint daher jetzt als ein singulärer Werth der zweiten Art.

Wie aber aus den Gleichungen (7. und 8.) $\psi_{x,z}$ wirklich gefunden werden kann, wird erst später (im VI. Th. d. S.) gelehrt, und bemerken wir hier nur einstweilen, daß zwischen R und

S und M, N, V noch eine Abhängigkeit statt finden muß, wenn überhaupt eine, beiden Gleichungen (7. und 8.) genügende Funktion $\psi_{x,z}$ möglich seyn soll. Diese Abhängigkeit zwischen R, S, M, N, V erhält man aber, wenn man die Gleichung (7.) nach allem z, und die Gleichung (8.) nach allem x differenziirt, dann aber aus allen 4 Gleichungen die drei Ausdrücke $\partial\psi_x$, $\partial\psi_z$ und $\partial^{1,1}\psi_{x,z}$ eliminirt, wie solches ebenfalls weiter unten (im VI. Th. d. S.) gelehrt werden wird. Die Eliminationsgleichung selbst mag aber einstweilen hier stehen, sie ist nämlich

$$0 = (M\cdot\partial V_\psi - N\cdot\partial V_x + V\cdot\partial M_\psi - V\cdot\partial N_x - \partial R_\psi)\cdot S + VN\cdot\partial S_x + \\ + (R - VM)\cdot\partial S_\psi.$$

XVI. Dieselbe Aufgabe der vorhergehenden Nummer (XV.) hat schon Lagrange (Leçons sur le calcul d. fonctions. Leç. XVI.) dadurch gelöst, daß er nicht, wie wir hier gethan haben, von einer beliebigen Differenzialgleichung, sondern von einer beliebigen Integralgleichung ausging. Er dachte sich nämlich eine Gleichung zwischen x, y und einer Konstante a, welche letztere jedoch in doppelter Gestalt vorkommt, nämlich einmal außerhalb, und dann noch in b, in so fern b eine durch die Gleichung

$$1) \qquad \varphi_{a,b} = 0$$

gegebene Funktion von a seyn soll, welche vorläufig noch ganz unbestimmt gelassen wird. Diese Gleichung zwischen x, y, a und b selbst sey durch

$$2) \qquad f_{x,y,a,b} = 0$$

vorgestellt. Die Differenzialgleichung dazu findet sich nun, wenn zwischen dieser (2.) und ihrer Ableitung

$$3) \qquad \partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y = 0,$$

alles a eliminirt, d. h. zwischen (1. 2. und 3.) sowohl a als auch b eliminirt wird, d. h. wenn man aus (2. und 3.)

$$4) \quad a = \mu_{x,y,y_1} \qquad \text{und} \qquad 5) \quad b = \nu_{x,y,y_1}$$

findet, und diese Werthe statt a und b in (1.) substituirt; so daß diese Differenzialgleichung selbst die Form

$$6) \qquad \varphi_{\mu,\nu} = 0$$

annimmt, und deshalb von der noch unbestimmt gelassenen Form φ der (1.) abhängt. Alles kommt nun darauf an, diese Form φ und auch die Form $f_{x,y,a,b}$ so zu wählen, daß dieser Differenzialgleichung (6.) der gegebene singuläre Werth, welcher durch

$$7) \qquad V_{x,y} = 0 \quad \text{oder} \quad y = \psi_x$$

bezeichnet seyn mag, genügt, und dabei doch nicht in dem allgemeinen Integral (2.) enthalten ist. Weil aber der singuläre Werth $y = \psi_x$, wenn er in das allgemeine Integral $f_{x,y,a,b} = 0$ statt y gesetzt wird, a als eine Funktion von x herstellen muß, und weil dann auch b, als eine Funktion von a, nothwendig eine Funktion von x wird; so muß $f_{x,y,a,b} = 0$ so gewählt werden, daß, wenn aus ihr die Gleichungen (4. und 5.) nämlich

$$4) \quad a = \mu_{x,y,y_1} \qquad \text{und} \qquad 5) \quad b = \nu_{x,y,y_1}$$

abgeleitet sind, und in letzteren nun ψ_x statt y, so wie $\partial\psi_x$ statt y_1 gesetzt wird, dann die Ausdrücke μ_{x,y,y_1} und ν_{x,y,y_1} in Funktionen von x übergehen, so daß

$$8) \quad a = \alpha_x \qquad \text{und} \qquad 9) \quad b = \beta_x$$

wird. Ist dieses geschehen; so darf man aus diesen letztern beiden Gleichungen (8. und 9.) nur noch x selbst eliminiren, um die Gleichung zwischen a und b zu haben, welche statt der $\varphi_{a,b}$ in (1.) genommen werden muß, damit auch die Differenzialgleichung $\varphi_{\mu,\nu} = 0$ in (6.) durch denselben singulären Werth $y = \psi_x$ identisch werde. Nimmt man nämlich die aus (8. und 9.) durch Elimination von x, zwischen a und b erhaltene Gleichung statt der

$$1) \qquad \varphi_{a,b} = 0;$$

so wird letztere offenbar identisch, wenn α_x statt a und β_x statt b gesetzt werden, während α_x und β_x das vorstellen, was aus μ_{x,y,y_1} und ν_{x,y,y_1} wird, wenn der gegebene singuläre Werth ψ_x statt y, also auch $\partial\psi_x$ statt y_1 gesetzt wird. Also wird dann die Gleichung (6.) durch $y = \psi_x$ identisch. Es ist jedoch offenbar einerlei, ob man aus den Gleichungen (2. u. 3.) nämlich aus

2) $f_{x,y,a,b} = 0$ und 3) $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y = 0$

zuerst a und b findet, dann erst ψ_x statt y (und $\partial\psi_x$ statt ∂y) setzt, und zuletzt x eliminirt, oder ob man in (2.) sogleich ψ_x statt y setzt, und dann sogleich aus den Gleichungen

9) $f_{x,\psi,a,b} = 0$ und 10) $\partial f_x + \partial f_\psi \cdot \partial\psi_x = 0$,

x eliminirt. Im letztern Falle so gut wie im erstern wird immer dieselbe Gleichung zwischen (a und b) nämlich

1) $$\varphi_{a,b} = 0$$

hervorgehen *).

Beispiel. Soll z. B. die Differenzialgleichung gefunden werden, welche den gegebenen singulären Werth

1) $y - Ax - B = 0$, oder $y = Ax + B = \psi_x$

hat; so geht man von der beliebigen Gleichung

2) $y^2 - ax^2 - b = 0 \quad = f_{x,y,a,b}$

aus, differenziirt sie, um

3) $y \cdot \partial y - ax = 0$ oder $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y = 0$

zu erhalten, findet aus (2. und 3.) sowohl a als auch b, nämlich

3) $a = \frac{y \cdot \partial y}{x}$ und 4) $b = y \cdot (y - x \cdot \partial y)$,

---

*) Umgekehrt sieht man nun auch, daß, wenn man aus der letztern Gleichung $\varphi_{a,b} = 0$, $b = b_a$ findet, und diesen Werth statt b in die (9. und 10.) substituirt, die entstehenden Gleichungen von einander nicht verschieden seyn können. Weil aber die Gleichung (9.), wenn sie, nachdem b_a statt b substituirt worden ist, nach a aufgelöst wird, a als Funktion von x geben muß; so folgt, daß wenn man sie nach allem x (auch nach dem x, was in allem a vorkommt), differenziirt, die entstehende Gleichung, nämlich

$$\partial f_x + \partial f_\psi \cdot \partial\psi_x + \partial f_{(a)} \cdot \partial a_x = 0$$

identisch seyn muß, während sie sich, wegen der (10.) bloß auf

$$\partial f_{(a)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial f_a + \partial f_b \cdot \partial b_a = 0$$

reduzirt, so daß man auf's neue erkennt, daß der Werth ψ ein singulärer Werth von y ist, weil er $\partial f_{(a)} = 0$ macht.

setzt statt y jetzt $Ax+B$, folglich A statt ∂y, und erhält

5) $a = \frac{(Ax+B)\cdot A}{x}$ und 6) $b = (Ax+B)\cdot B$ *).

Wird nun aus diesen beiden Gleichungen (5. und 6.) x eliminirt, so erhält man

7) $$ab - B^2a - A^2b = 0 = \varphi_{a,b}.$$

Setzt man nun hier statt a und b die Ausdrücke aus (3. und 4.); so hat man die gesuchte Differenzialgleichung, nämlich

8) $$(y\cdot\partial y - A^2x)(y - x\cdot\partial y) - B^2\cdot\partial y = 0,$$

welche den in (1.) gegebenen singulären Werth hat. — Findet man aus der Gleichung (7.) b in a, und setzt diesen Ausdruck statt a in die Gleichung (2.); so erhält man

9) $$y^2 - ax^2 - \frac{B^2a}{a - A^2} = 0;$$

und dies ist das allgemeine Integral der Differenzialgleichung (8.).

Hätte man sogleich in der angenommenen Gleichung (2.) nämlich in

2) $$y^2 - ax^2 - b = 0,$$

statt y den in (1.) gegebenen singulären Werth $Ax+B$ gesetzt, und dann die entstehende Gleichung

3) $$(A^2 - a)\cdot x^2 + 2AB\cdot x + B^2 - b = 0$$

differenziirt, also

4) $$(A^2 - a)\cdot x + AB = 0$$

gefunden, und nun x aus (3. und 4.) eliminirt; so hätte man sogleich die Gleichung (7.) zwischen a und b erhalten.

Uebrigens folgt noch hieraus:

1) daß auf diesem Wege unendlich viele verschiedene Differenzialgleichungen gefunden werden können, welche alle einen und denselben gegebenen singulären Werth haben;

2) daß man, um zu verschiedenen gegebenen singulären

---

*) Sollte aus einer der Gleichungen (5. oder 6.) zur Rechten x von selbst wegfallen; so wäre dies ein Beweis, daß die angenommene Gleichung $f_{x,y,a,b} = 0$ nicht fähig ist, auf diesem Wege eine Differenzialgleichung zu liefern, welche diesen gegebenen singulären Werth hat. Man muß dann statt ihrer irgend eine andere Gleichung zwischen x, y, a und b nehmen.

Werthen Differenzialgleichungen zu finden, dennoch, wenn man will, immer von einer und derselben Gleichung $f_{x,y,a,b} = 0$ ausgehen könne, und daß dann nur die Gleichung zwischen a und b für jeden andern singulären Werth eine andere wird, daß also dann b nur immer als eine andere Funktion von a sich ausweist, so daß das aus $f_{x,y,a,b} = 0$ für jeden andern gegebenen singulären Werth sich ergebende allgemeine Integral

$$f_{x,y,a,b_a} = 0$$

eben deshalb auch jedesmal als ein anderes angesehen werden muß, welches der zu diesem andern singulären Werth gefundenen anderen Differenzialgleichung zukommt;

3) daß unsre Behandlung derselben Aufgabe nach der vorhergehenden Nummer (XV.) direkter ist, den wahren Grund dieser Erscheinungen unmittelbar erkennen läßt, endlich die Aufgabe selbst allgemeiner und umfassender lößt, wenn auch die Ausführung selbst Lehren in Anspruch nimmt, welche in unserem System später erst vorgetragen werden.

XVII. Lagrange hat auch noch gezeigt, daß jede Gleichung

1) $$\varphi_{a,b} = 0,$$

wenn man in ihr statt a und b, die aus einer beliebigen Gleichung von der Form

2) $$f_{x,y,a,b} = 0$$

und ihrem Differenzial

3) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y = 0$$

gezogenen Werthe

4) $a = \mu_{x,y,y_1}$ und 5) $b = \nu_{x,y,y_1}$

subſtituirt, eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung

6) $$\varphi_{\mu,\nu} = 0$$

giebt, welche $\partial^2 y = \frac{0}{0}$ zu nehmen erlaubt, welche also im Allgemeinen einen singulären Werth hat.

Die Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, welche aus (6.) hervorgeht, wird nämlich

$$7)\quad \partial\varphi_\mu \cdot \partial\mu_{(x)} + \partial\varphi_\nu \cdot \partial\nu_{(x)} = 0.$$

Weil aber

$$8)\quad \partial\mu_{(x)} = \partial\mu_x + \partial\mu_y \cdot \partial y + \partial\mu_{y_1} \cdot \partial^2 y,$$

$$9)\quad \partial\nu_{(x)} = \partial\nu_x + \partial\nu_y \cdot \partial y + \partial\nu_{y_1} \cdot \partial^2 y;$$

weil ferner auch (4. und 5.)

$$10)\quad \partial\mu_{(x)} = 0 \qquad \text{und} \qquad 11)\quad \partial\nu_{(x)} = 0$$

Gleichungen der 2ten Ordnung sind, welche keine der Konstanten a und b mehr enthalten, und identisch werden, wenn man für y den aus $f_{x,y,a,b} = 0$ gezogenen Werth $y = W_{x,a,b}$ (und natürlich dann ∂W_x, $\partial^2 W_x$ beziehlich statt ∂y und $\partial^2 y$) substituirt; so haben $\partial\mu_{(x)}$, $\partial\nu_{(x)}$ offenbar einen gemeinschaftlichen Faktor von der Form *)

$$P_{x,y,y_1} + \partial^2 y,$$

so daß sie die Form annehmen können

$$12)\quad \partial\mu_{(x)} = M_{x,y,y_1} \cdot (P + \partial^2 y),$$

$$13)\quad \partial\nu_{(x)} = N_{x,y,y_1} \cdot (P + \partial^2 y).$$

Die Gleichung (7.) kann daher die Gestalt annehmen

$$14)\quad (\partial\varphi_\mu \cdot M + \partial\varphi_\nu \cdot N) \cdot (P + \partial^2 y) = 0,$$

so daß sie $\partial^2 y$ in der Form $\frac{0}{0}$ liefert, so oft ihr erster Faktor der Null gleich gesetzt wird, d. h. so oft man für y den Werth setzt, welcher aus

$$15)\quad \partial\varphi_\mu \cdot M + \partial\varphi_\nu \cdot N = 0$$

hervorgeht, wenn man aus letzterer Gleichung und der gegebenen

---

*) Hätten $\partial\mu_{(x)}$, $\partial\nu_{(x)}$ keinen solchen Faktor; so würden aus der Gleichung, welche aus $\partial\mu_{(x)} = 0$ und $\partial\nu_{(x)} = 0$ durch Elimination von $\partial^2 y$ hervorgeht, die y_1, y und x nicht von selbst herausfallen, sondern diese Eliminationsgleichung würde bloß wiederum identisch werden, wenn W, ∂W_x beziehlich statt y, y_1 gesetzt werden. Dann hätte diese Gleichung als Differenzialgleichung der 1sten Ordnung ein Integral $y = W_{x,a,b}$ oder $f_{x,y,a,b} = 0$ mit zwei willkührlichen Konstanten, was nach (§. 267.) unmöglich ist.

Differenzialgleichung (6.) die Ableitung y_1 eliminirt. Dieser Werth von y wird also im Allgemeinen ein singulärer Werth seyn *).

Uebrigens fällt aus (12. und 13.) in die Augen, daß der Quotient

$$\frac{\partial \mu_{(x)}}{\partial \nu_{(x)}} = \frac{\partial \mu_{y_1}}{\partial \nu_{y_1}} = \frac{M_{x,y,y_1}}{N_{x,y,y_1}}$$

allemal von $\partial^2 y$ befreit werden kann, und Lagrange hat auch noch bewiesen, daß man gerade an diesem Kennzeichen erkennen kann, daß zu einer, auf die Form

$$\varphi_{\mu,\nu} = 0$$

gebrachten Differenzialgleichung der ersten Ordnung, allemal eine Gleichung $f_{x,y,a,b} = 0$ so gefunden werden könne, daß die aus $f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$ für a und b gezogenen Werthe, diese gegebenen μ und ν sind; so daß dann die Elimination von b aus $f = 0$ und $\varphi_{a,b} = 0$ zu gleicher Zeit auch das allgemeine Integral von $\varphi_{\mu,\nu} = 0$ seyn muß. Und diese Gleichung $f_{x,y,a,b} = 0$ erhält man dann offenbar dadurch, daß man jede der gegebenen Funktionen μ und ν einer Konstante gleichsetzt, (z. B. $= a$ und $= b$), und dann aus den Gleichungen

$$\mu = a \quad \text{und} \quad \nu = b$$

den Ausdruck y_1 eliminirt.

Da wir diesen letztern Beweis später bei Gelegenheit der singulären Werthe der Differenzialgleichungen der höhern Ordnungen geben; so mag hier einstweilen dieses letztgesagte durch das nachstehende Beispiel erörtert werden.

---

*) Der andere Faktor $P + \partial^2 y = 0$ fällt offenbar mit jeder der beiden Differenzialgleichungen $\partial \mu_{(x)} = 0$ und $\partial \nu_{(x)} = 0$ zusammen, nach (12. und 13.), wird also wiederum durch $y = W_{x,a,b}$ d. h. durch $f_{x,y,a,b} = 0$ identisch; während dieselbe Gleichung $f_{x,y,a,b} = 0$ auch die Gleichung (6.) identisch macht, sobald statt b der aus $\varphi_{a,b} = 0$ gezogene Werth b_a gesetzt wird.

Beispiel. Ist die gegebene Differenzialgleichung

1) $\varphi_{\mu,\nu} = 0$, wo $\mu = x + y \cdot \partial y$, $\nu = y \cdot \sqrt{1+\partial y^2}$;

so findet sich

2) $\partial\mu_{(x)} = 1 + \partial y^2 + y \cdot \partial^2 y$

3) $\partial\nu_{(x)} = \sqrt{1+\partial y^2} \cdot \partial y + \frac{y \cdot \partial y \cdot \partial^2 y}{\sqrt{1+\partial y^2}}$;

also ist

4) $\frac{\partial\mu_{(x)}}{\partial\nu_{(x)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{1+\partial y^2}}$ von $\partial^2 y$ befreit *).

Es wird daher das allgemeine Integral von (1.) gefunden, wenn man aus

5) $x + y \cdot \partial y = a$ und 6) $y \cdot \sqrt{1+\partial y^2} = b$,

∂y eliminirt, wodurch sich

7) $\sqrt{y^2 + (a-x)^2} = b$ oder $y^2 + (a-x)^2 = b^2$

ergiebt, wenn nur statt b der aus

8) $\varphi_{a,b} = 0$

gezogene Werth b_a substituirt wird. Und die Gleichung (1.) hat dann auch im Allgemeinen immer einen singulären Werth, obgleich derselbe zuweilen auch ein besonderes Integral seyn kann.

XVIII. Schließlich wollen wir aber noch folgendes bemerken:

1) Die Funktion y_x, welche ein singulärer Werth von der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1} = 0$ ist, ist offenbar eine andere als die aus der allgemeinen oder aus irgend einer der besonderen Integralgleichungen für y hervorgehende; aber alle haben doch die Eigenschaft mit einander gemein, daß sie statt y, ihre Ableitung also statt ∂y oder y_1 in $F_{x,y,y_1} = 0$ substituirt, diese Differenzialgleichung identisch machen. Weil jedoch die

---

*) Kürzer findet sich

$$\partial\mu_{y_1} = y, \quad \partial\nu_{y_1} = \frac{y \cdot y_1}{\sqrt{1+y_1^2}},$$

also

$$\frac{\partial\mu_{y_1}}{\partial\nu_{y_1}} = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}};$$

so daß man natürlich lieber diesen eben beschriebenen Weg betreten wird, statt des obigen.

gegebene Differenzialgleichung $F = 0$ wenigstens durch Einführung eines neuen Veränderlichen z allemal auf die Form

$$V_{x,z} \cdot U_{x,z,z_1} = 0$$

gebracht werden kann, so daß der singuläre Werth den Faktor V allein, welcher nicht einmal eine Ableitung enthält, zu Null macht, den andern Faktor U dagegen nicht, während dieser letztere erst die Ableitung z_1 in sich aufgenommen hat; so folgt, daß, wenn man früher oder später durch den Faktor V wegdividirt, der singuläre Werth weder die übrig bleibende Gleichung der 1sten Ordnung, noch weniger aber die Gleichungen der höhern Ordnung, welche sich aus dieser letztgenannten der 1sten Ordnung weiter bilden lassen, identisch machen könne. Dagegen wird der singuläre Werth allen Gleichungen, welche aus der gegebenen der ersten Ordnung gebildet sind, (auf algebraischem Wege oder durch Differenziiren oder durch beide Mittel) genügen, so lange man den Faktor V mit gehöriger Sorgfalt beibehält, welches nach (I. Th. d. S. §. 96.) ohnedies immer geschehen soll.

2) Jede Funktion y_x, also auch, wenn sie ein singulärer Werth von y seyn sollte, der zu einer gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ gehört, hat ihre bestimmten Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ ꝛc., welche alle mit y_x zugleich völlig bestimmte Funktionen von x sind. Die aus $F_{x,y,y_1} = 0$ hergeholten Gleichungen des (§. 266.) nämlich

$$\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y}, \quad \partial^3 y = (\pi^3)_{x,y} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

können aber diese, dem singulären Werth zugehörigen Ableitungen deshalb nicht liefern, weil, auch wenn man Zähler und Nenner durch den gemeinschaftlichen Faktor wegdividirt, die entstehenden Gleichungen dann dem andern Faktor der Differenzialgleichung zugehören, und nicht demjenigen Faktor, welchen der singuläre Werth zu Null macht. Da dieselben Gleichungen

$$\partial^2 y = \pi_2, \quad \partial^3 y = \pi_3 \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

aber aus $F_{x,y,y_1} = 0$ gebildet sind; so müssen sie alle durch den singulären Werth mit $F = 0$ zugleich identisch werden, so lange

man durch den gemeinschaftlichen Faktor, den der singuläre Werth zu Null macht, nicht wegdividirt. Daher bringt der singuläre Werth die obigen Gleichungen

$$\partial^2 y = \pi_2, \quad \partial^3 y = \pi_3 \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

nothwendig alle, wenn man durch keinen gemeinschaftlichen Faktor, der Null werden kann, wegdividirt, nothwendig auf die Form

$$\partial^2 y = \frac{0}{0}, \quad \partial^3 y = \frac{0}{0} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Und nun mag das Wichtigste aus der Theorie der Differenzialgleichungen der 1sten Ordnung noch durch ein Schlußbeispiel erörtert werden.

Es sey gegeben die Differenzialgleichung

1) $(y \cdot \partial y - A^2 x)(y - x \cdot \partial y) - B^2 \cdot \partial y = 0,$

so findet sich dazu das allgemeine Integral mit einer willkührlichen Konstante a, nämlich

2) $y^2 - ax^2 - \frac{B^2 a}{a - A^2} = 0$ oder $y = \sqrt{ax^2 + \frac{B^2 a}{a - A^2}}$ *).

Giebt man hier der willkührlichen Konstante a allerlei besondere Werthe, z. B. $a = 0$, $a = 1$, $a = B$, $a = A$, $a = B - A$, $a = -1$ ꝛc. ꝛc.; so erhält man zunächst diese besonderen Integrale:

3) $y = 0,$

4) $y^2 - x^2 - \frac{B^2}{1 - A^2} = 0,$

5) $y^2 - Bx^2 - \frac{B^3}{B - A^2} = 0,$

6) $y^2 - Ax^2 - \frac{B^2}{1 - A} = 0,$

7) $y^2 + (A - B)x^2 - \frac{B^2(B - A)}{B - A - A^2} = 0,$

8) $y^2 + x^2 - \frac{B^2}{1 + A^2} = 0,$

u. s. w. f.

*) Die Methode des (§. 265. oder §. 266.) führt zu diesem Integral in Form einer unendlichen Reihe, welche aber auf diese Quadratwurzel sich zurückführen läßt. Setzt man aber $y^2 = z$, so giebt (§. 266.) das allgemeine Integral in endlicher Form zwischen z und x. — In einem spätern Kapitel werden auch noch die Methoden beschrieben werden, welche man versucht, um wo möglich jedes solches Integral sogleich in endlicher Form zu erhalten.

und jede dieser durch (2.—8.) bestimmten Funktionen von x für y hat die Eigenschaft, daß, wenn man aus ihr durch Differenziiren ∂y ableitet, und diese Werthe y_x und ∂y_x in die (1.) statt y und ∂y substituirt, solche die (1.) identisch machen.

Will man aber aus dem allgemeinen Integral (2.) das mit $x = \alpha$ anfangende Integral y_x finden; so will man die willkührliche Konstante a so bestimmen, daß $y = 0$ wird, so oft $x = \alpha$ ist. Setzt man aber in (2.) $x = \alpha$ und zugleich $y = 0$; so erhält man

9) $$-a\alpha^2 - \frac{B^2 a}{a - A} = 0,$$

woraus für a zwei Werthe sich ergeben, nämlich $a = 0$ und $a = \frac{A\alpha^2 - B^2}{\alpha^2}$, so daß obiges besondere Integral (3.) und noch das folgende besondere Integral

$$y^2 - \frac{A\alpha^2 - B^2}{\alpha^2} \cdot x^2 + A\alpha^2 - B = 0$$

oder 10) $$y^2 - (A\alpha^2 - B^2) \cdot \frac{x^2 - \alpha^2}{\alpha^2} = 0$$

diese verlangte Eigenschaft haben, nämlich für $x = \alpha$ allemal $y = 0$ zu geben *).

Findet man endlich aus der Gleichung (1.) durch fortgesetztes Differenziiren neue Differenzialgleichungen der höhern Ordnungen, und daraus die Funktionen π_1, π_2, π_3 ꝛc., welche sich für ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$ ꝛc. auf dem (§. 266.) bezeichneten Wege ergeben; so zeigen sich in π_2 noch

---

*) Sucht man dann noch überdies den Werth y_β von y, welcher sich aus diesem besondern Integral (10.) für $x = \beta$ ergiebt; so erhält man

$$y_\beta = \frac{\sqrt{(A\alpha^2 - B^2)(\beta^2 - \alpha^2)}}{\alpha},$$

und dies ist dann das Integral, welches mit $x = \alpha$ anfängt, und mit $x = \beta$ aufhört, oder welches zwischen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ genommen ist.

Bezeichnet man übrigens die Funktion, welche sich für y aus dem allgemeinen Integral (2.) ergiebt, durch y_x; so kann man die Funktion, welche für y aus (10.) hervorgeht, recht bequem durch $y_{x \div \alpha}$ bezeichnen, und das hier eben durch y_β bezeichnete bestimmte Integral müßte jetzt durch $y_{\beta \div \alpha}$ bezeichnet werden.

die dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Faktoren *) $y-Ax-B$, $y-Ax+B$, $y+Ax-B$, $y+Ax+B$, welche $= 0$ gesetzt

$$11) \quad \begin{cases} y-Ax-B=0, & \partial y-A=0 \\ y-Ax+B=0, & \partial y-A=0 \\ y+Ax-B=0, & \partial y+A=0 \\ y+Ax+B=0, & \partial y+A=0 \end{cases}$$

geben, und in der That ebenfalls für y 4 Funktionen von x liefern, die der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügen, welche aber für keinen konstanten Werth von a aus dem allgemeinen Integral (2.) hervorgehen, mithin als singuläre Werthe angesehen werden müssen.

Und so wie diese singulären Werthe aus der gegebenen Differenzialgleichung gefunden worden sind, eben so kann man selbige auch aus dem allgemeinen Integral

$$2) \quad y^2-ax^2-\frac{B^2a}{a-A^2}=0$$

ableiten, wenn man den Ausdruck zur Linken $f_{x,y,a}$ bloß nach a ableitet, und diese Ableitung $= 0$ setzt, so daß man

$$12) \quad -x^2+\frac{B^2A^2}{(a-A^2)^2}=0 \quad \text{oder} \quad a-A^2=\pm\frac{AB}{x}$$

erhält. Wird nämlich aus dieser Gleichung a in x gefunden, und der Werth statt a in (2.) gesetzt, d. h. wird aus (2. und 12.) das a eliminirt; so müssen die singulären Werthe hervorgehen. Man findet aber durch diese Elimination

$$13) \quad y^2-A^2x^2\mp 2ABx-B^2=0,$$

in welcher Gleichung die obigen 4 singulären Werthe stecken.

Und findet man aus der gegebenen Differenzialgleichung (1.) zunächst

$$14) \quad \partial y=\frac{y^2+A^2x^2-B^2\pm\sqrt{(y^2+A^2x-^2B^2)^2-4A^2x^2y^2}}{2xy}=p_{x,y},$$

so giebt

---

*) Da übrigens die dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Faktoren nicht immer bei dem ersten Anblick als solche bemerkt werden; so wird man im Praktischen lieber den Zähler und den Nenner jeden für sich $= 0$ setzen, und jede dieser aus den eben erhaltenen beiden Gleichungen hervorgehenden Funktionen y_x prüfen, 1) ob sie beiden Gleichungen zugleich genügt, und 2) ob sie den Anforderungen an singuläre Werthe entspricht.

15) $\partial p_y = \frac{1}{0}$ oder $\frac{1}{\partial p_y} = 0$,

d. h. jetzt die Gleichung

16) $(y^2+A^2x^2-B^2)^2-4A^2x^2y^2 = 0$

abermals die 4 singulären Werthe.

Und löste man das allgemeine Integral (2.) nach a auf, so daß man

17) $a = \frac{y^2+A^2x^2-B^2 \pm \sqrt{(y^2+A^2x^2-B^2)^2-4A^2x^2y^2}}{4x^2} = \varphi_{x,y}$

erhält; so hätte die Gleichung $\frac{1}{\partial \varphi_y} = 0$ oder $\partial \varphi_y = \frac{1}{0}$, d. h. jetzt

18) $(y^2+A^2x^2-B^2)^2-4A^2x^2y^2 = 0$,

wiederum die singulären Werthe geliefert.

B. α) Von den Integralien der Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung.

§. 271. Aufgabe.

Es ist gegeben eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung

$$F_{x,y,y_1,y_2} = 0$$

zwischen x, y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ (wo aber ∂y_x durch y_1 und $\partial^2 y_x$ durch y_2 vorgestellt wird); man soll alle Funktionen y von x finden, welche dieser Gleichung genügen.

Auflösung. Man verfahre ganz analog mit der Auflösung zu (§. 265.).

I. Man bezeichne $x-\alpha$ durch $\varkappa$, und suche alle Funktionen y von x in Form einer, nach Potenzen von $x-\alpha$ oder $\varkappa$ fortlaufenden unendlichen Reihe, welche dann durch

1) $y_\varkappa$ oder $\delta^0 y + \delta y \cdot \varkappa + \delta^2 y \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 y \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$

bezeichnet wird; so müssen die Koeffizienten $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. dieser Reihe so gesucht werden, daß, wenn man $\alpha+\varkappa$ statt x und die Reihe selbst statt y, dann aber ihre beiden ersten Ableitungen nach x statt y_1 und y_2 in $F=0$ substituirt, diese letztere Gleichung identisch werde.

II. Wird aber $y = y_x$ genommen,

so wird y_1 oder $\partial y_x = \partial(y_x)_x = \partial(y_x)_x$ *)

und y_2 oder $\partial^2 y = \partial^2(y_x)_x = \partial^2(y_x)_x$.

Bezeichnen wir daher dem (§. 243.) zu Folge die Reihen $\partial(y_x)_x$, $\partial^2(y_x)_x$, welche statt y_1 und y_2 gesetzt werden, durch

2) $(y_1)_x$ oder $\delta^0 y_1 + \delta y_1 \cdot x + \delta^2 y_1 \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 y_1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

3) $(y_2)_x$ oder $\delta^0 y_2 + \delta y_2 \cdot x + \delta^2 y_2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 y_2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$;

so folgt sogleich aus der Vergleichung mit den Reihen, die man erhält, wenn man aus (1.) $\partial(y_x)_x$, $\partial^2(y_x)_x$ ableitet, die Vergleichung zwischen den Koeffizienten, nämlich

4) $\delta^0 y_1 = \delta y$, $\delta y_1 = \delta^2 y$, $\delta^2 y_1 = \delta^3 y, \cdots$, $\delta^a y_1 = \delta^{a+1} y$

5) $\delta^0 y_2 = \delta^2 y$, $\delta y_2 = \delta^3 y$, $\delta^2 y_2 = \delta^4 y, \cdots$, $\delta^a y_2 = \delta^{a+2} y$.

Endlich kann man, da statt x jetzt $\alpha + x$ gesetzt werden muß, dieses $\alpha + x$ ebenfalls in der Form

6) x_x d. h. $\delta^0 x + \delta x \cdot x + \delta^2 x \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 x \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

schreiben, so daß

$\delta^0 x = \alpha$, $\delta x = 1$, $\delta^2 x = \delta^3 x = \text{ꝛc.} = 0$ ist.

III. Da nun $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ identisch werden muß, so oft x_x, y_x, $(y_1)_x$, $(y_2)_x$ statt beziehlich x, y, y_1, y_2 gesetzt wird; da aber F dadurch in

F_x oder $\delta^0 F + \delta F \cdot x + \delta^2 F \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 F \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

übergeht: so hat man $F_x = 0$ für jedes x, also auch

7) $\delta^0 F = 0$, $\delta F = 0$, $\delta^2 F = 0$, $\delta^3 F = 0$ ꝛc.,

---

*) Es ist nämlich, wenn f_x eine beliebige Funktion von x, x aber wiederum eine Funktion von x ist,

$$\partial f_{(x)} = \partial f_x \cdot \partial x_x.$$

Hier ist aber $\partial x_x = 1$, also $\partial f_{(x)} = \partial f_x$. — Und weil $\partial^2 x_x = 0$ wird, so folgt auch das Weitere sogleich.

und dies sind die Gleichungen, welche zur Bestimmung der Koeffizienten

$$\delta^0 y, \quad \delta y, \quad \delta^2 y, \quad \delta^3 y \text{ ꝛc.}$$

dienen.

IV. Entwickelt man nämlich die Ausdrücke $\delta^0 F$, δF, $\delta^2 F$ ꝛc. nach der praktischen Regel des (§. 253.); so erhält man, wenn zu gleicher Zeit nach (4. und 5.) statt $\delta^a y_1$ jetzt $\delta^{a+1} y$, so wie statt $\delta^a y_2$ jetzt $\delta^{a+2} y$ gesetzt wird,

$$\delta^0 F = F_{x,y,y_1,y_2},$$
$$\delta F = \partial F_x \cdot \delta x + \partial F_y \cdot \delta y + \partial F_{y_1} \cdot \delta^2 y + \partial F_{y_2} \cdot \delta^3 y,$$
$$\delta^2 F = \partial^2 F_x \cdot \delta x^2 + \text{ ꝛc. ꝛc. } + \partial F_{y_2} \cdot \delta^4 y,$$

u. s. w. f.,

wenn man nur nicht vergißt, in den Endresultaten zur Rechten dieser Gleichungen statt x, y, y_1, y_2 beziehlich die Anfangsglieder der Reihen $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $(y_1)_\varkappa$, $(y_2)_\varkappa$, nämlich α, $\delta^0 y$, $\delta^0 y_1$ oder δy, $\delta^0 y_2$ oder $\delta^2 y$ zu setzen, jener praktischen Regel des (§. 253.) zu Folge.

Setzt man nun diese Ausdrücke für $\delta^0 F$, δF, $\delta^2 F$, $\delta^3 F$ ꝛc. einzeln der Null gleich: so dient die erste Gleichung zur Bestimmung von $\delta^2 y$, die nächste liefert $\delta^3 y$, die folgende $\delta^4 y$ u. s. w. f., alle in α, $\delta^0 y$, δy ausgedrückt; so daß $\delta^0 y$ und δy ganz willkührlich bleiben, und durch C und C_1 vorgestellt werden können, jedenfalls aber, wie alle Koeffizienten der Reihe $y_\varkappa$, von x ganz unabhängig sind.

V. Setzt man nun diese Werthe in die Reihe

$$8) \quad y_\varkappa \text{ oder } \delta^0 y + \delta y \cdot \varkappa + \delta^2 y \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 y \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$$

und zu gleicher Zeit wiederum $x - \alpha$ statt $\varkappa$; so hat man in (8.) alle Funktionen y von x vorgestellt, welche $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ identisch machen, mit Ausnahme jedoch derjenigen, welche nicht bloß F, sondern zufällig auch noch einen der Ausdrücke δF, $\delta^2 F$ ꝛc. identisch zu 0 machen oder auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, so daß für sie die Gleichungen $\delta F = 0$,

$\delta^2 F = 0$ ꝛc. nicht mehr alle zur Bestimmung der Koeffizienten $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. dienen, sondern die Ausdrücke für letztere die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, welcher Fall daher nachher noch besonders in Erwägung gezogen werden muß, dem (§. 96. d. I. Th. d. S.) gemäß.

§. 272. Zusatz.

Nimmt man von

1) $\qquad F_{x,y,y_1,y_2} = 0,$

hinter einander die Ableitungen nach allem x; so erhält man

2) $\quad \partial F_{(x)} = 0, \quad \partial^2 F_{(x)} = 0, \quad \partial^3 F_{(x)} = 0$ ꝛc.

um aus (1. und 2.) sowohl $\partial^2 y_x$, als auch $\partial^3 y_x$, $\partial^4 y_x$, $\partial^5 y_x$ ꝛc. in x, y und y_1 allein ausdrücken zu können. Aber nach (§. 253.) sind die im (§. 271. IV.) gefundenen Ausdrücke für δF, $\delta^2 F$, $\delta^3 F$ ꝛc. genau die jetzt durch $\partial F_{(x)}$, $\partial^2 F_{(x)}$, $\partial^3 F_{(x)}$ ꝛc. bezeichneten, wenn man nur dort $\delta x = 1$ und statt δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. jetzt ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ ꝛc. setzt. Daraus folgt, daß hier für $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ ꝛc. sich genau dieselben Ausdrücke in x, y und y_1 ergeben, wie sie dort für $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. in α, $\delta^0 y$ und δy gefunden worden sind. Daraus folgt ferner, daß man die obigen Werthe von $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ ꝛc. in α, $\delta^0 y$ oder C, und δy oder C_1 ausgedrückt abermals erhält, wenn man aus vorstehenden Gleichungen (1. und 2.) die Ableitungen $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, $\partial^4 y_x$, ..., in x, y und y_1 ausgedrückt findet, nämlich $\partial^2 y_x = \pi_2$, $\partial^3 y_x = \pi_3$, $\partial^4 y_x = \pi_4$ ꝛc., wo π_2, π_3, π_4 ꝛc. Funktionen von x, y und y_1 sind, und wenn man zuletzt statt x, y und y_1 beziehlich α, C und C_1 schreibt.

Also findet man dasselbe Resultat des (§. 271. V. 8.) noch einmal unmittelbar aus der Formel des allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatzes

$$\delta \quad y = y_\alpha + [\partial y_x]_\alpha \cdot (x - \alpha) + [\partial^2 y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots,$$

wenn man C und C_1 statt y_α und $[\partial y_x^x]_\alpha$, dagegen statt $[\partial^2 y_x]_\alpha$,

$[\partial^3 y_x]_\alpha$, $[\partial^4 y_x]_\alpha$ ꝛc. das schreibt, was aus den Funktionen π_2, π_3, π_4 ꝛc. hervorgeht, wenn man beziehlich α, C, C_1 statt x, y und y_1 setzt.

Das Zusammentreffen des hiesigen Resultats mit dem (§. 271. V. 8.) gefundenen giebt aber die Ueberzeugung, daß die aus dieser Anwendung des allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatzes hervorgehende Reihe, auch wenn C und C_1 ganz willkührlich konstant bleiben, doch allemal der gegebenen Differenzialgleichung wirklich genügt, also nicht mehr und auch nicht weniger Funktionen y von x liefert, als deren (obige etwaige Ausnahmswerthe abgerechnet) der Gleichung $F = 0$ wirklich zukommen.

Beispiel 1. Ist gegeben die Gleichung der 2ten Ordnung

$$y - x \cdot \partial y + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y = 0;$$

so erhält man, wenn selbige differenziirt wird,

$$\tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^3 y = 0, \quad \text{oder} \quad \partial^3 y = 0,$$

also auch $\partial^4 y = 0$, $\partial^5 y = 0$ ꝛc, während $\partial^2 y = 2\,\frac{x \cdot \partial y - y}{x^2}$ ist.

Die Gleichung (♂) giebt nun sogleich

$$y = C + C_1 \cdot (x - \alpha) + \frac{\alpha \cdot C_1 - C}{\alpha^2} \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!}$$

oder
$$y = (2C\alpha - C_1) \cdot x + \frac{C_1 \alpha - C}{\alpha^2} \cdot x^2,$$

oder, wenn man 1 statt α setzt,

$$y = (2C - C_1) \cdot x + (C_1 - C) \cdot x^2,$$

d. h.
$$y = ax + bx^2,$$

wo a und b zwei willkührliche Konstanten sind.

Zu demselben Endresultat kehrt man aber immer wieder zurück, wenn man auch dem α irgend einen andern Werth giebt.

Beispiel 2. Ist gegeben die Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

$$y + \partial^2 y = 0,$$

so erhält man daraus durch fortgesetztes Differenziiren

$$\begin{aligned} \partial y + \partial^3 y &= 0 \\ \partial^2 y + \partial^4 y &= 0 \\ \partial^3 y + \partial^5 y &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. f.; also $\partial^2 y = -y$, $\partial^3 y = -\partial y$, $\partial^4 y = y$, $\partial^5 y = \partial y$, $\partial^6 y = -y$, $\partial^7 y = -\partial y$, $\partial^8 y = y$, $\partial^9 y = \partial y$ ꝛc., allgemein $\partial^{2a} y = (-1)^a \cdot y$ und $\partial^{2a+1} y = (-1)^a \cdot \partial y$.

Demnach findet sich aus (ϑ) sogleich

$$y = C + C_1 \cdot (x-\alpha) - C \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} - C_1 \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + C \frac{(x-\alpha)^4}{4!} + \cdots,$$

oder für $\alpha = 0$

$$y = C\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + C_1 \cdot \left(x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right),$$

d. h.
$$y = C \cdot Cos\, x + C_1 \cdot Sin\, x,$$

wo C und C_1 zwei willkührliche Konstanten sind.

Wollte man dem α andere Werthe geben, etwa den Werth q, so würde man dem ersten Anschein nach ein anderes Resultat erhalten, etwa

$$y = C \cdot Cos(x-q) + C_1 \cdot Sin(x-q).$$

Weil jedoch
$$Cos(x-q) = Cos\, x \cdot Cos\, q + Sin\, x \cdot Sin\, q,$$
$$Sin(x-q) = Sin\, x \cdot Cos\, q - Cos\, x \cdot Sin\, q$$

ist, so würde dies geben

$$y = (C \cdot Cos\, q - C_1 \cdot Sin\, q) \cdot Cos\, x + (C \cdot Sin\, q + C_1 \cdot Cos\, q) \cdot Sin\, x$$

oder

$$y = a \cdot Cos\, x + b \cdot Sin\, x,$$

wo a und b zwei mit C und C_1 zugleich willkührliche Konstanten sind.

§. 273. Zusatz.

Man kann nun wiederum beweisen, daß in dem (§. 271. V. 8. oder §. 272. ϑ) gefundenen Resultat, welches alle Funktionen y von x liefert, die $F = 0$ identisch machen, und welches durch

$$y = \psi_{x,\alpha,C,C_1}$$

vorgestellt seyn mag, statt C und C_1 solche Zusammensetzungen aus α und zweien neuen willkührlichen Konstanten a und b gesetzt werden können, daß die α sich von selber wegheben, also nur zwei ganz willkührliche Konstanten bleiben. Setzt man nämlich statt α einen beliebigen aber bestimmten Ziffernwerth und zu gleicher Zeit a und b statt C und C_1, und geht dann ψ_{x,α,C,C_1} in $\varphi_{x,a,b}$ über; so wird $y = \varphi_{x,a,b}$ eben so allgemein seyn als $y = \psi$ es ist.

Denn man entwickle $\varphi_{x,a,b}$ nach dem allgemeinen Maclaurin'schen Lehrsatze in eine, nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufende Reihe, so wird augenblicklich der Ausdruck ψ wieder erscheinen. Da nämlich φ statt y gesetzt der Gleichung $F = 0$ genügt, so daß $F_{x,\varphi,\partial\varphi,\partial^2\varphi} = 0$ ist; so wird man hieraus für $\partial^2\varphi$, $\partial^3\varphi$, $\partial^4\varphi$ ꝛc. genau dieselben Ausdrücke in x, φ und $\partial\varphi$ erhalten, wie (§. 272.) für $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, $\partial^4 y$ ꝛc. in x, y und y_1 gefunden worden sind. Setzt man daher

$$1)\ [\varphi_x]_\alpha = C \qquad \text{und} \qquad 2)\ [\partial\varphi_x]_\alpha = C_1;$$

so hat man die beiden Gleichungen zwischen α, a, b, C und C_1, welche das geben, was statt der willkührlichen Konstanten a und b gesetzt werden muß, um aus $\varphi_{x,a,b}$ sogleich die durch ψ_{x,α,C,C_1} vorgestellte Reihe zu erhalten, während dieselben Gleichungen (1. und 2.) auch zeigen, was statt C und C_1 in dem zuerst gefundenen Resultat ψ_{x,α,C,C_1} gesetzt werden muß, damit sich in selbigem die α von selber wegheben, und das Resultat $\varphi_{x,a,b}$ mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b hervorgeht.

Die Funktion ψ_{x,α,C,C_1} oder $\varphi_{x,a,b}$, welche alle Werthe vorstellt, die, wenn man sie statt y setzt, die Gleichung der 2ten Ordnung

$$F_{x,y,y_1,y_2} = 0$$

identisch machen, enthält daher in der Wirklichkeit nur zwei willkührliche Konstanten, für welche jedoch Zusammensetzungen aus mehren andern geschrieben werden können, so daß sie scheinbar auch deren mehrere in sich aufgenommen haben kann. (Vgl. die Beispiele zu §. 272.).

§. 274. Erklärung und Folgerung.

Lassen wir zunächst die etwaigen singulären Werthe (die unter denen in §. 271. V. erwähnten befindlich seyn können) außer Acht, und betrachten wir nur das unter

$$y = \varphi_{x,a,b} \qquad \text{oder auch} \qquad f_{x,y,a,b} = 0$$

vorgestellte allgemeine Ur-Integral der gegebenen Differenzialgleichung

$$F_{x,y,y_1,y_2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad F = 0,$$

mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b, (welche in F nicht vorkommen). Man bemerkt dann sogleich folgendes:

I. Leitet man aus

1) $y = \varphi_{x,a,b}$ oder $f_{x,y,a,b} = 0$

zunächst ab, indem man nach allem x differenziirt,

2) $\partial y = \partial \varphi_x$ oder $\partial f_{(x)} = 0$

3) $\partial^2 y = \partial^2 \varphi_x$ oder $\partial^2 f_{(x)} = 0$;

so müssen die aus diesen Gleichungen für y_x, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ hervorgehenden Ausdrücke (in x, a und b) statt y, ∂y und $\partial^2 y$ in $F = 0$ subſtituirt, letztere Gleichung identiſch machen, so daß ſich nicht nur alle x, ſondern auch alle a und b zuletzt von ſelbſt wegheben.

II. Eliminirt man alſo aus den 3 Gleichungen (I. 1—3.) ſowohl a als auch b; ſo muß eine Gleichung $L = 0$ zwiſchen x, y, ∂y und $\partial^2 y$ übrig bleiben, welche genau mit $F = 0$ zuſammenfällt, d. h. welche genau die Gleichung $\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y,y_1}$ liefert, wie ſolche (§. 272.) aus $F = 0$ gefunden worden iſt, — ſo nämlich, daß wenn man den, aus obiger Gleichung $L = 0$ für $\partial^2 y$ gefundenen Ausdruck in x, y und ∂y oder y_1 in $F = 0$ ſtatt $\partial^2 y$ ſetzt, die x, y und y_1 ſich von ſelber wegheben.

Denn würden ſich letztere x, y, y_1 nicht von ſelber wegheben; ſo hätte man eine Gleichung zwiſchen x, y und y_1, welche identiſch werden müßte, ſo oft man $\varphi_{x,a,b}$ ſtatt y ſetzte, welche alſo eine Ur-Integralgleichung $y = \varphi_{x,a,b}$ mit zwei willkührlichen Konſtanten hätte, obgleich ſie nur von der erſten Ordnung iſt. Solches iſt aber nach (§. 267.) nicht möglich.

III. Eliminirt man aber aus den beiden erſtern Gleichungen (I. 1. 2.), nämlich aus

$f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$,

zuerſt b allein, ſo daß man

4) $f'_{x,y,y_1,a} = 0$

erhält; dann aus denſelben Gleichungen $f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$ auch a allein, ſo daß das Reſultat durch

5) $f''_{x,y,y_1,b} = 0$

vorgestellt werden kann: so genügt jede dieser beiden Gleichungen (4. und 5.), welche allgemeine erste Integrale von $F = 0$ genannt werden, wiederum dergestalt der gegebenen $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$, daß, wenn man z. B. aus

6) $f' = 0$ und $\partial f'_{(x)} = 0$

sowohl $\partial^2 y_x$ oder y_2, als auch ∂y_x oder y_1 findet, (in x, y und a) und diese Werthe in $F = 0$ statt ∂y oder y_1 und statt $\partial^2 y$ oder y_2 substituirt, das Resultat identisch $0 = 0$ wird, so daß sich die x, die y und die a von selber wegheben. Gerade so müssen, wenn man aus

7) $f'' = 0$ und $\partial f''_{(x)} = 0$

und $F = 0$ die ∂y_x und $\partial^2 y_x$ eliminirt, ebenfalls die x, y, b von selbst wegfallen, und es muß die Endgleichung $0 = 0$ hervorgehen.

Denn fielen nach der Elimination von ∂y_x und $\partial^2 y_x$ aus

$f' = 0$, $\partial f'_{(x)} = 0$ und $F = 0$

die y, x, a nicht von selber heraus; so hätte man eine Gleichung zwischen x, y, a, welche durch $y = \varphi_{x,a,b}$ für jedes b identisch werden müßte, was offenbar nicht möglich ist. Und fielen nach der Elimination von ∂y_x und $\partial^2 y_x$ aus

$f'' = 0$, $\partial f''_{(x)} = 0$ und $F = 0$

nicht die x, y, b von selber fort; so hätte man eine Gleichung zwischen x, y und b, welche durch $y = \varphi_{x,a,b}$ für jedes a identisch werden müßte, was eben so wenig möglich ist.

Eliminirt man daher aus

6) $f' = 0$ und $\partial f'_{(x)} = 0$

die Konstante a, oder aus

7) $f'' = 0$ und $\partial f''_{(x)} = 0$

die Konstante b; so muß man in beiden Fällen zu einer Gleichung zwischen x, y, y_1 und y_2 gelangen, welche mit der gegebenen $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ zusammenfällt.

IV. Obgleich übrigens diese beiden allgemeinen ersten Integrale

4) $f'_{x,y,y_1,a} = 0$ und 5) $f''_{x,y,y_1,b} = 0$

nothwendig identisch werden, wenn man in ihnen $\varphi_{x,a,b}$ statt y, also $\partial\varphi_x$ statt ∂y_x oder y_1 setzt; so giebt doch jede derselben, wenn man sie nach ∂y_x oder y_1 auflöst, für ∂y_x eine verschiedene Zusammensetzung aus x und y, etwa

8) $\partial y_x^{\pi} = \pi_{x,y,a}$ und 9) $\partial y_x = \pi'_{x,y,b}$,

welche Gleichungen beziehlich mit (4. und 5.) zusammenfallen, und natürlich noch immer alle beide zugleich identisch werden, so oft $\varphi_{x,a,b}$ statt y, also $\partial\varphi_x$ statt ∂y geschrieben wird.

Eliminirt man aber aus den beiden allgemeinen ersten Integralen (4. und 5.) oder (8. und 9.) das Zeichen (den Ausdruck) ∂y_x oder y_1; so erhält man wiederum eine Gleichung zwischen x,y,a und b, welche noch immer unter denselben Voraussetzungen identisch ist, unter denen (4. und 5.) es sind, nämlich wenn $\varphi_{x,a,b}$ statt y gesetzt wird, welche also wiederum das allgemeine Ur-Integral von $F = 0$ ist, oder das allgemeine zweite Integral, wie dieses Ur-Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten, zum Unterschied von den allgemeinen ersten Integralen (in III.), genannt wird.

V. Fände sich außer dem Integral $f_{x,y,a,b} = 0$ oder $y = \varphi_{x,a,b}$ noch

10) $y = \chi_{x,c,c'}$ oder $\psi_{x,y,c,c'} = 0$

als ein allgemeines Ur-Integral von $F = 0$; so würde man aus diesem durch Differenziiren finden

11) $\partial y = \partial\chi_x$ oder $\partial\psi_{(x)} = 0$,

12) $\partial^2 y = \partial^2\chi_x$ oder $\partial^2\psi_{(x)} = 0$,

und man könnte dann aus (10.—12.) c und c' eliminiren, und müßte dadurch wiederum $F = 0$ oder $\partial^2 y = \pi_2$ erhalten. Man könnte aber auch aus (10. und 11.) einmal bloß c' und ein andermal bloß c eliminiren, und das erstemal

13) $\psi'_{x,y,\partial y,c} = 0$,

das anderemal aber

14) $\psi''_{x,y,\partial y,c'} = 0$

als neues allgemeines erstes Integral erhalten. Alle diese Gleichungen (10.—14.), so wie $F = 0$ selbst, würden dadurch nothwendig identisch, daß die (10.), aus welcher sie abgeleitet sind, identisch ist, d. h., daß $\chi_{x,c,c'}$ unter y gedacht wird.

VI. Weil aber bewiesen worden ist, daß das allgemeine Ur-Integral $y = \varphi_{x,a,b}$ alle möglichen Integrale in sich faßt; so folgt zu gleicher Zeit, daß jedes andere allgemeine Ur-Integral, also auch $y = \chi_{x,c,c'}$ in ersterem enthalten seyn, also aus ihm hervorgehen müsse, wenn man für a und b gewisse (wenn auch zur Zeit unbekannte) Funktionen von c und c' setzt. Unter der Voraussetzung, daß a und b diese (noch unbekannten) Funktionen von c und c', nämlich $a_{c,c'}$ und $b_{c,c'}$ repräsentiren, ist also

$$\varphi_{x,a,b} \text{ identisch mit } \chi_{x,c,c'}$$
$$\partial\varphi_x \text{ identisch mit } \partial\chi_{x'}$$
$$\partial^2\varphi_x \text{ identisch mit } \partial^2\chi_{x'}$$

und es fallen also die Gleichungen (10.—12.) zusammen beziehlich mit den Gleichungen (1.—3.). Dagegen kann im allgemeinen die Gleichung (11.) nicht mit der (4.), und (14.) nicht mit der (5.) zusammenfallen, obgleich alle 4 Gleichungen (4. 5. 13. u. 14.) so wie alle 12 Gleichungen zugleich identisch werden müssen, wenn in ihnen $\varphi_{x,a,b}$ statt y gesetzt, und $a = a_{c,c'}$, $b = b_{c,c'}$ genommen wird.

VII. Setzt man ferner in (4.) die Funktion $a_{c,c'}$ statt a, so wie in (5.) die andere $b_{c,c'}$ statt b; so entstehen zwei neue Gleichungen zwischen $x, y, \partial y, c, c'$, welche nicht die Gleichungen (13. u. 14.) sind, aber solche nothwendig liefern müssen, wenn man aus ihnen einmal c', das anderemal c eliminirt.

Und nimmt man endlich je 5 von den vorhergehenden 12 oder 14 Gleichungen, in denen $x, y, \partial y, a, b, c, c'$ vorkommen, oder je 6 von denselben Gleichungen, wenn auch noch $\partial^2 y$ in ihnen vorkommt, um die $x, y, \partial y$, oder auch noch $\partial^2 y$ zu eliminiren; so erhält man jedesmal die zwei Gleichungen zwischen den 4 Konstanten a, b, c, c', aus denen dann die noch unbekannten Zu-

sammensetzungen $a_{c,c'}$, $b_{c,c'}$ gefunden werden, wenn man erstere nach a und nach b auflöset.

VIII. Die gegebene Gleichung $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ der 2ten Ordnung hat daher unendlich viele allgemeine erste Integrale, welche aber alle aus zweien derselben, z. B. aus

$$f'_{x,y,y_1,a} = 0 \quad \text{und} \quad f''_{x,y,y_1,b} = 0$$

hervorgehen, wenn man sie nach a und nach b auflöst, so daß sie beziehlich

$$a = u_{x,y,y_1} \quad \text{und} \quad b = v_{x,y,y_1}$$

liefern; und wenn man dann eine ganz beliebige Funktion von u und v, einer beliebigen neuen willkührlichen Konstante C gleich setzt, so daß

$$Z_{u,v} = C$$

diese unendlich vielen allgemeinen ersten Integrale alle vorstellt, sobald nur unter $Z_{u,v}$ jede beliebige, ganz willkührliche Funktion von u und v (also auch von u allein oder von v allein) gedacht, und für jede andere bestimmte Zusammensetzung, welche man statt Z setzt, auch eine andere Konstante C_1, C_2, C_3 ꝛc. statt C geschrieben wird.

IX. Hat man aber von der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ zu zwei verschiedenen, ersten allgemeinen Integralen

$$1)\ \psi'_{x,y,\partial y,p} = 0 \quad \text{und} \quad 2)\ \psi''_{x,y,\partial y,q} = 0$$

sich hingearbeitet, wo p und q willkührliche *), in $F = 0$ nicht vorkommende Konstanten sind; so darf man nur das Zeichen (den

---

*) Eliminirt man aus (1. und 2.) ∂y, und fällt dann y zugleich weg, so daß bloß eine Gleichung zwischen x, p und q bleibt; so sind nicht beide Konstanten willkührlich, sondern die eine $q = q_p$ von der andern abhängig, so daß, vermöge dieser Abhängigkeit, die x von selber sich wegheben. Nur wenn p und q als von einander unabhängige Konstanten sich bewähren, sagt man: die beiden Integrale (1. und 2.) seyen von einander verschiedene.

Ausdruck) ∂y aus den beiden ersten Integralen (1. und 2.) elimiiren, und man erhält die Gleichung

3) $$V_{x,y,p,q} = 0,$$

welche als das allgemeine Ur-Integral mit zwei willkührlichen Konstanten p und q angesehen werden muß, das wiederum jedes andere allgemeine zweite Ur-Integral in sich schließt.

X. Ist eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung gegeben

1) $$M_{x,y,y_1} = 0,$$

differenziirt man diese, so daß man

2) $$\partial M_{(x)} = 0$$

als eine Differenzialgleichung der 2ten Ordnung erhält; findet man nun zu dieser letztern ein allgemeines Ur-Integral mit 2 willkührlichen Konstanten

3) $f_{x,y,a,b} = 0$ oder $y = \varphi_{x,a,b}$:

so muß allemal eine Relation zwischen den Konstanten a und b möglich seyn, so daß das Integral (3.) auch das allgemeine Ur-Integral von (1.) ist, welches nur eine einzige willkührliche Konstante haben kann.

Denn das vollständige Integral von (1.), wenn solches durch

4) $$\psi_{x,y,c} = 0$$

bezeichnet wird, genügt nothwendig der (1.) und der (2.) zugleich, ist also in dem allgemeinen Ur-Integral (3.) der letztern nothwendig enthalten. Also muß man in (3.) für a und b gewisse Funktionen a_c, b_c von c setzen können, so daß (4.) daraus hervorgeht; also muß man auch statt b eine solche Funktion von a setzen können, daß aus (3.) sogleich (4.) hervorgeht, mit dem Unterschiede, daß statt c eine Funktion von a zu stehen kommt.

Will man aber diese Relation zwischen b und a finden; so muß man aus

$$f = 0, \quad \partial f_{(x)} = 0 \quad \text{und} \quad M_{x,y,y_1} = 0$$

∂y und y eliminiren, und die Gleichung zwischen b und a, bei welcher aus letzterer alle x von selbst herausfallen, ist die zwischen b und a gesuchte.

XI. Ist

1) $$f'_{x,y,y_1,a} = 0$$

ein allgemeines erstes Integral von der Differenzialgleichung

2) $$F_{x,y,y_1,y_2} = 0,$$

und löst man die Gleichung (1.) nach der willkührlichen Konstante a algebraisch auf, so daß man

3) $$a = \varphi_{x,y,y_1}$$

erhält; so muß, wenn man diese Gleichung (3.) differenziirt, die Differenzialgleichung

4) $$0 = \partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot y_1 + \partial\varphi_{y_1} \cdot y_2$$

mit der gegebenen Differenzialgleichung (2.) zusammenfallen, so daß, wenn man aus dieser (2.), nach (§. 272.)

5) $$\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y,y_1} \quad \text{oder} \quad -\pi_2 + y_2 = 0$$

ableitet, und diesen Werth statt y_2 in (4.) substituirt, die entstehende Gleichung

6) $$\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot y_1 + \partial\varphi_{y_1} \cdot (\pi_2)_{x,y,y_1} = 0$$

nach y_1, nach y, und auch nach dem außerhalb sich befindlichen x identisch seyn muß.

Anmerkung. Daß übrigens jedes allgemeine erste Integral und das allgemeine Ur-Integral einer Differenzialgleichung $F = 0$ der 2ten Ordnung, wiederum eine unendliche Menge besonderer Integrale in sich schließen, nach den unendlich vielen besondern Werthen, welche jede der willkührlichen Konstanten annehmen kann, fällt zu sehr von selbst in die Augen, als daß wir dabei noch verweilen dürften. Daher mögen hier nur noch, zur Erläuterung dieser Lehren, einige Beispiele stehen.

Beispiel 1. Ist gegeben die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung

1) $$x \cdot \partial^2 y_x - \partial y_x = 0 \quad \text{oder} \quad x \cdot d^2 y - dy \cdot dx = 0$$ *);

---

*) Es ist $\partial^2 y_x$ identisch mit $\frac{d^2 y}{dx^2}$ und ∂y_x identisch mit $\frac{dy}{dx}$.

so erhält man zunächst als allgemeines Ur-Integral

$$2) \qquad y = c + c' \cdot x^2 \quad *)$$

mit den beiden willkührlichen Konstanten c und c'. — Nimmt man hiervon das Differenzial; so erhält man

$$3) \qquad \partial y = 2c' \cdot x,$$

welches, da es schon eine der willkührlichen Konstanten weniger hat, bereits eines der allgemeinen ersten Integrale von (1.) ist. — Eliminirt man aber zwischen (2. und 3.) die andere c' der willkührlichen Konstanten, so hat man

$$4) \qquad 2y = 2c + x \cdot \partial y;$$

und dieses ist das andere der allgemeinen ersten Integrale (§. 274. III.).

Daß die (3.) und (4.), jede für sich, der gegebenen Differenzialgleichung (1) genügen, erkennt man für die (3.) wie folgt: Differenziirt man sie nämlich, so erhält man

$$5) \qquad \partial^2 y = 2c'.$$

Und setzt man nun die aus (3. und 5.) hervorgehenden Werthe statt ∂y und $\partial^2 y$ in die (1.), so erhält man die identische Gleichung

$$2c' \cdot x - 2c' \cdot x = 0;$$

so daß also jede Funktion y_x, welche statt y gesetzt der (3.) genügt, nothwendig auch der (1.) genügen muß. — Gerade so läßt sich dasselbe auch für das andere allgemeine erste Integral (4.) nachweisen (§. 274. III.).

Und hätte man durch irgend ein Verfahren aus der Gleichung (1.) zunächst die beiden ersten Integrale (3. und 4.) gefunden; so konnte man aus beiden noch ∂y eliminiren, und man gelangte sogleich zur

---

*) Die Anwendung des (§. 271. oder §. 272.) giebt eigentlich unmittelbar

$$y = (c - c'\alpha + c'\alpha^2) + \tfrac{1}{2}\frac{c'}{\alpha} x^2.$$

Weil man aber

$$c - c'\alpha + c'\alpha^2 = a \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\frac{c'}{\alpha} = b$$

setzen kann; so giebt dies

$$y = a + b \cdot x^2$$

oder

$$y = c + c' \cdot x^2,$$

wenn man die Konstanten a und b wiederum durch c und c' vorgestellt seyn lassen will.

Ur-Integralgleichung (2.) mit den beiden willkührlichen Konstanten c und c′ (§. 274. IV.).

Setzt man in diesem letztgenannten (2.)

$$c' = \frac{1}{2a} \quad \text{und} \quad c = -\frac{a^2+b}{2a};$$

so geht solches in

$$6) \qquad 2ay - x^2 + a^2 + b = 0$$

über; und sind hier a und b noch völlig willkührlich und konstant gedacht, so ist diese (6.) abermals ein allgemeines Ur-Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b, aber in dem Integral (2.) bereits enthalten. (S. 274. V. VI.).

Differenzirt man nun die (6.), so erhält man

$$7) \qquad a \cdot \partial y - x = 0 \quad \text{oder} \quad a = \frac{x}{\partial y};$$

und in so fern diese Gleichung bereits nur noch eine willkührliche Konstante a hat, ist sie noch ein allgemeines erstes Integral von (1.). Eliminirt man aber aus (6. und 7.) die Konstante a; so erhält man

$$8) \qquad \frac{2xy}{\partial y} - x^2 + \frac{x^2}{\partial y^2} + b = 0$$

oder $$2xy \cdot \partial y - x^2 \cdot \partial y^2 + x^2 + b \cdot \partial y^2 = 0$$

oder $$2xy \cdot dx \cdot dy - x^2 \cdot dy^2 + x^2 \cdot dx^2 + b \cdot dy^2 = 0,$$

und diese Gleichung ist abermals ein erstes Integral von (1.) mit der willkührlichen Konstante b (§. 274. V. VI.).

Und wollte man das erste Integral (4.), nämlich

$$2y = 2c + x \cdot \partial y$$

mit dem eben erhaltenen ersten Integral (8.) durch Elimination von ∂y verbinden: so erhielte man abermals das allgemeine Ur-Integral

$$9) \left(y - c + \frac{c + \sqrt{c^2 - b}}{2b} \cdot x^2\right) \cdot \left(y - c + \frac{c - \sqrt{c^2 - b}}{2b} \cdot x^2\right) = 0,$$

von welchem Produkt zur Linken jeder Faktor für sich zwei willkührliche Konstanten hat, und dabei, wenn er $= 0$ gesetzt wird, der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügt; so daß

$$10) \qquad y - c + \frac{c + \sqrt{c^2 - b}}{2b} x^2 = 0$$

und $$11) \qquad y - c + \frac{c - \sqrt{c^2 - b}}{2b} \cdot x^2 = 0$$

als allgemeine Ur-Integrale angesehen werden können, die jedoch beide

in dem Ur-Integral (2.), wenn $c' = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - b}}{2b}$ genommen oder gedacht wird, enthalten sind (§. 274. IX.).

Beispiel 2. Hätte man dagegen diese andere Differenzialgleichung der 2ten Ordnung gehabt, nämlich

$$1) \qquad x \cdot (\partial^2 y)^2 - 2\partial y \cdot \partial^2 y + x = 0;$$

so hätte man als allgemeines Ur-Integral erhalten, nach (§. 271. oder §. 272.),

$$2) \qquad \tfrac{1}{3} x^3 - 2p \cdot y + p^2 x + q = 0 \text{ *)};$$

und aus diesem, wenn man solches differenziirt

$$3) \qquad x^2 - 2p \cdot \partial y + p^2 = 0,$$

welche Gleichung bloß eine willkührliche Konstante p enthält, also bereits ein allgemeines erstes Integral von (1.) ist. Eliminirt man aus (2. und 3.) die Konstante p; so erhält man

$$4) \quad x^2 - \frac{q - \frac{2}{3}x^3}{y - x \cdot \partial y} \cdot \partial y + \frac{(\frac{1}{2}q - \frac{1}{3}x^3)^2}{(y - x \cdot \partial y)^2} = 0,$$

welches abermals ein allgemeines erstes Integral ist.

Hätte man das allgemeine Ur-Integral in der Form

$$5) \qquad y = c + c_1 \cdot x + \frac{1}{12c_1} \cdot x^3$$

gefunden (wie unten in der Note); so hätte man durch Differenziiren erhalten

$$6) \qquad \partial y = c_1 + \frac{1}{4c_1} \cdot x^2,$$

welche Gleichung bereits ein allgemeines erstes Integral von (1.) ist, welche daher, wenn man sie differenziirt, und diese Werthe für ∂y und

---

*) Dieses allgemeine Ur-Integral erhält man unmittelbar durch die Methode des (§. 271. oder §. 272.) weil aus der gegebenen Differenzialgleichung sogleich $\partial^4 y = \partial^5 y = \partial^6 y = \text{&c.} = 0$ hervorgeht. Man wird aber dieses Ur-Integral zunächst in der Form

$$y = c + c_1 x + \frac{1}{12c_1} \cdot x^3$$

erhalten, wo c und c_1 die beiden willkührlichen Konstanten sind, aus welcher Form jedoch die (2.) sogleich hervorgeht, wenn man $\frac{q}{2p}$ statt c und $\frac{1}{2}p$ statt c_1 setzt.

$\partial^2 y$ in die (1) substituirt, diese (1.) genau identisch macht, so daß sich die y und die x von selbst wegheben. Eliminirt man aber aus (5. u. 6.) die Konstante c_1, so erhält man abermals ein allgemeines erstes Integral mit der willkührlichen Konstante c.

Und eliminirt man aus den beiden allgemeinen ersten Integralen (3. und 6.) das Zeichen ∂y; so erhält man

$$x^2 - 2pc_1 - \frac{p}{2c_1} \cdot x^2 + p^2 = 0 \quad \text{d. h.} \quad \left(1 - \frac{p}{2c_1}\right) \cdot x^2 - 2pc_1 + p^2 = 0,$$

welche Gleichung durch $1 - \frac{p}{2c_1} = 0$ oder $p = 2c_1$ identisch wird, wie solches in der Note (zu §. 274. IX.) gesagt worden ist. Die Gleichungen (3. und 6.) werden daher nicht als 2 von einander verschiedene allgemeine erste Integralgleichungen angesehen.

Wird dagegen ∂y aus (4. und 6.) eliminirt; so erhält man

$$7) \qquad \tfrac{1}{3} x^3 - 4c_1 \cdot y + 4c_1^2 \cdot x + q = 0,$$

welches wieder die allgemeine Ur-Integralgleichung (2.) ist, nur $2c_1$ statt p geschrieben.

Beispiel 3. Ist gegeben die Differenzialgleichung

$$1) \qquad y \cdot \partial y - x \cdot \partial y^2 - xy \cdot \partial^2 y = 0;$$

so erhält man zunächst als allgemeine Ur-Integralgleichung nach (§. 271. oder §. 272.) *)

$$2) \qquad y^2 - ax^2 - b = 0.$$

Differenziirt man diese, so erhält man

$$3) \qquad y \cdot \partial y - ax = 0,$$

welche, da sie nur noch eine willkührliche Konstante enthält, bereits eines der allgemeinen ersten Integrale ist. Eliminirt man aber aus (2. und 3.) die Konstante a, so erhält man

$$4) \qquad y^2 - xy \cdot \partial y - b = 0$$

als ein anderes der allgemeinen ersten Integrale.

---

*) Diese (§§.) geben diese endliche Form nicht direkt, sondern sie geben

$$y = \sqrt{b + ax^2}$$

in Form einer unendlichen Reihe. Erst später wird gezeigt werden, wie man in einzelnen Fällen zur etwa vorhandenen endlichen Form des Integrals sich hinarbeiten kann. Will man aber mittelst der hiesigen Methoden (§. 271. 272.) seinen Zweck erreichen, so muß man $y^2 = z$ setzen und die neue Gleichung in z behandeln.

Löst man die Gleichungen (3. und 4.) nach a und nach b auf; so erhält man diese beiden allgemeinen ersten Integrale in der Form:

5) $$a = \frac{y \cdot \partial y}{x}$$

und 6) $$b = y^2 - xy \cdot \partial y.$$

Nimmt man nun eine beliebige Zusammensetzung (Funktion) dieser beiden, hier für a und b gefundenen Ausdrücke, z. B. den Quotienten derselben, und setzt solchen einer beliebigen Konstante c gleich, also daß man hat

7) $$\frac{xy - x^2 \cdot \partial y}{\partial y} = c \quad \text{oder} \quad xy - x^2 \cdot \partial y - c \cdot \partial y = 0;$$

so ist dies nach (§. 274. VIII.) abermals eines der allgemeinen ersten Integrale von (1.), wie man sich überzeugt, wenn man die (7.) differenziirt, also daß

8) $$-x \cdot \partial y + y - (x^2 + c) \cdot \partial^2 y = 0$$

erhalten wird, und nun aus (7. und 8.) c eliminirt, wo man sogleich zur Differenzialgleichung (1.) wiederum gelangt.

Nimmt man noch eine beliebige Zusammensetzung (Funktion) der in (5. und 6.) für a und b gefundenen Ausdrücke, etwa ihre Summe, so erhält man

9) $$y^2 - xy \cdot \partial y + \frac{y \cdot \partial y}{x} = c_1 \quad \text{oder} \quad xy^2 - (x^2 - 1) \cdot y \cdot \partial y = c_1 \cdot x$$

als ein neues erstes Integral der gegebenen Differenzialgleichung (1.). Eliminirt man daher aus (7. und 9.) das Zeichen ∂y, so muß man wiederum zum Ur-Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten c und c_1 zurückkommen. Man erhält aber dann

10) $$x \cdot y^2 - (x^2 - 1) \cdot y \cdot \frac{xy}{x^2 + c} = c_1 \quad \text{oder} \quad (c+1) \cdot y^2 = cc_1 + c_1 \cdot x^2,$$

und dies ist genau das Ur-Integral (2.), wenn man

$$\frac{cc_1}{c+1} = b \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c+1} = a \quad \text{setzt.}$$

Beispiel 4. Ist gegeben die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung

1) $$y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x - (\partial y_x - x \cdot \partial^2 y_x)^2 - (\partial^2 y_x)^2 = 0;$$

so erhält man nach (§. 271. oder §. 272.) sogleich die allgemeine Ur-Integralgleichung

2) $$y - \tfrac{1}{2} ax^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$$

mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b. Differenziirt man diese, so erhält man

3) $$\partial y_x - ax - b = 0.$$

Und eliminirt man aus (2. und 3.) zuerst b, dann a, so ergeben sich die beiden allgemeinen ersten Integrale

4) $$y - \tfrac{1}{2}ax^2 - x(\partial y - ax) - a^2 - (\partial y - ax)^2 = 0,$$

5) $$y + \tfrac{1}{2}x(b - \partial y) - bx - \frac{(b - \partial y)^2}{x^2} - b^2 = 0.$$

§. 275. Zusatz.

B. β) Von den singulären Werthen der Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung.

Wenn es für die Differenzialgleichungen der 2ten Ordnung solche genügende Funktionen y von x giebt, welche analog dem im (§. 270.) für die Differenzialgleichungen der 1sten Ordnung Gesagten, mit dem Namen der singulären Werthe belegt werden müssen; so müssen es Werthe von y (in x) seyn, welche erstens der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ genügen, dann aber auch wenigstens eine der nach (§. 272.) aus $F = 0$ für $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, $\partial^4 y$ ꝛc. gefundenen Funktionen π_2, π_3, π_4 ꝛc. von x, y und y_1, die im Allgemeinen von der Form $\frac{G_{x,y,y_1}}{H_{x,y,y_1}}$ seyn wird, auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, also dreien Gleichungen

$$F_{x,y,y_1,y_2} = 0, \quad G_{x,y,y_1} = 0 \quad \text{und} \quad H_{x,y,y_1} = 0$$

zu gleicher Zeit genügen.

Umgekehrt aber, hat man Werthe von y (in x) gefunden, welche diesen dreien Gleichungen zu gleicher Zeit genügen; so sind solche nicht nothwendig singuläre Werthe, weil sie noch besondere, in dem allgemeinen Ur-Integral $f_{x,y,a,b} = 0$ enthaltene Integrale seyn können, welche aus $f = 0$ für schickliche spezielle konstante Werthe von a und b hervorgehen. Daher muß jedesmal, wenn solches nicht ausdrücklich als unnöthig erkannt worden ist, besonders noch nachgewiesen werden, daß man nicht bloß

einen der $F = 0$ genügenden, sondern wirklich einen singulären Werth von $F = 0$ habe.

I. Die erste Art der singulären Werthe von $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ erhält man nun wiederum, wenn man unmittelbar aus $F = 0$, nach (§. 272.)

$$\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y,y_1}$$

findet, und den gefundenen Ausdruck $= \frac{0}{0}$ setzt. (Vgl. §. 270. I.).

Beispiel 1. Es sey gegeben die Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, nämlich

$$1) \qquad \partial y^2 - 2x \cdot \partial y - (y - x^2) \cdot \partial^2 y = 0,$$

so findet sich daraus sogleich

$$2) \qquad \partial^2 y = \frac{\partial y^2 - 2x \cdot \partial y}{y - x^2} = \pi_2.$$

Wird dieses nun $= \frac{0}{0}$ gesetzt, so erhält man

$$3) \quad \partial y^2 - 2x \cdot \partial y = 0 \quad \text{oder} \quad \partial y \cdot (\partial y - 2x) = 0$$

und $$4) \quad y - x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad y = x^2.$$

Der Werth aus (4.) genügt der Gleichung (3.), auch der (1.), und kann daher ein singulärer Werth seyn. Prüft man ihn aber zuletzt noch an dem allgemeinen Ur-Integral der (1.), nämlich an der Gleichung

$$5) \qquad y = 2a^2 + 2ax + x^2 - \frac{b}{a} \cdot e^{\frac{1}{a}x}$$

mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b; so giebt die Elimination von y aus (4. und 5.)

$$6) \qquad 0 = 2a^3 + 2a^2 x - b \cdot e^{\frac{1}{a}x}.$$

Da nun diese Gleichung identisch wird für $b = 0$ und $a = 0$, also für (nach x) konstante Werthe von a und b; so erscheint der Werth (4.) nicht als singulärer Werth, sondern als ein besonderes Integral *).

---

*) Vermöge einer später (XI.) zu erweisenden Eigenschaft der singulären Werthe wird man auf diesem Wege (I.) nie einen singulären Werth haben, wenn nicht Zähler und Nenner von $\partial^2 y$ einen gemeinschaftlichen Faktor haben, welcher entweder bloß x und y, im Allgemeinen aber x, y und y_1 enthält.

Beispiel 2. Wäre gegeben die Differenzialgleichung

$$1) \quad \partial y^2 - 2x \cdot \partial y - \partial y \cdot \partial^2 y + 2x \cdot \partial^2 y = 0,$$

so erhielte man sogleich

$$2) \quad \partial^2 y = \frac{\partial y^2 - 2x \cdot \partial y}{\partial y - x^2} = \pi_2.$$

Sollte nun $\partial^2 y$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so müßte man

$$3) \quad \partial y^2 - 2x \cdot \partial y = 0 \quad \text{d. h.} \quad (\partial y - 2x) \cdot \partial y = 0$$

und $$4) \quad \partial y - 2x = 0$$

setzen. Beiden Gleichungen (3. und 4.) so wie der Differenzialgleichung (1.) genügt der Werth (4.), und da er nicht dem andern Faktor von (1.) nämlich der Gleichung

$$5) \quad \partial y - \partial^2 y = 0$$

genügt; so ist er auch in dem allgemeinen Ur-Integral der (1.) nämlich in

$$6) \quad y = a + b \cdot e^x$$

mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b nicht enthalten, mithin ein singulärer Werth. In der That, integrirt man die Gleichung (4.), so daß man

$$7) \quad y = c + x^2$$

erhält, und eliminirt man nachgehends y aus (6. und 7.); so findet sich

$$8) \quad 0 = a - c + b \cdot e^x - x^2,$$

und man sieht, wie es nicht möglich ist, dieser Gleichung durch konstante Werthe von a und b zu genügen.

II. Die singulären Werthe der 2ten Art ergeben sich, wenn man nicht schon dem $\partial^2 y$ oder π_2, sondern erst dem $\partial^3 y$ oder π_3, die Form $\frac{0}{0}$ giebt.

Es ist aber dabei nicht nöthig, daß man genau nach (§. 272.) verfahre, und aus $F = 0$ und $\partial F_{(x)} = 0$ sogleich y_2 eliminire, um y_3 oder $\partial^3 y$ bloß in x, y und y_1 ohne y_2 (d. h. ohne $\partial^2 y$) ausgedrückt zu erhalten: sondern man kann direkt aus $\partial F_{(x)} = 0$ finden $\partial^3 y$ in x, y, y_1 und y_2 ausgedrückt, diesem Ausdruck $\frac{G_{x,y,y_1,y_2}}{H_{x,y,y_1,y_2}}$ die Form $\frac{0}{0}$ geben, und diese beiden

Gleichungen $G=0$ und $H=0$ unmittelbar mit $F=0$ in Verbindung bringen, dergestalt, daß man Werthe von y in x sucht, welche allen dreien Gleichungen $G=0$, $H=0$ und $F=0$ zugleich genügen.

Beispiel 1. Ist gegeben die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung

$$1)\quad y-x\cdot\partial y+\tfrac{1}{2}x^2\cdot\partial^2 y-(\partial y-x\cdot\partial^2 y)^2-\partial^2 y^2=0;$$

so findet sich, wenn man sie differenziirt, und dann nach $\partial^3 y$ auflöst,

$$2)\quad \partial^3 y=\frac{0}{\frac{1}{2}x^2+2x(\partial y-x\cdot\partial^2 y)-2\cdot\partial^2 y}=\pi_3.$$

Der Ausdruck π_3 wird also die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, wenn

$$3)\quad \tfrac{1}{2}x^2+2x(\partial y-x\cdot\partial^2 y)-2\partial^2 y=0$$

ist. Eliminirt man aber aus (1. u. 3.) den Ausdruck $\partial^2 y$; so erhält man

$$4)\quad y-\frac{2x+x^3}{2(1+x^2)}\cdot\partial y+\frac{x^4-16\cdot\partial y^2}{16(1+x^2)}=0.$$

Genügt nun diese Gleichung wirklich der (1.); so giebt sie alle Werthe für y, welche der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügen, dabei den Ausdruck π_3 oder $\partial^3 y$ auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, und welche daher nur noch geprüft werden müssen, ob sie d. h. das allgemeine Integral der (4.) im allgemeinen Ur-Integral der (2.) enthalten sind, oder ob sie zu den singulären Werthen gezählt werden müssen.

Um nun die erstere Prüfung zu bewerkstelligen, muß man die Gleichung (4.) differenziiren, aus ihr und ihrem Differenzial sowohl $\partial^2 y$ als auch ∂y (in x und y ausgedrückt) finden, und diese Werthe in die Gleichung (1.) substituiren. Geschieht dies, so findet man, daß sich die neue Gleichung auf $0=0$ reduzirt, daß also (1) durch (4.) identisch wird *), und deshalb ist die Gleichung (4.) der singuläre Werth von (1.), sobald nur noch gezeigt ist, daß derselbe nicht in dem allgemeinen Ur-Integral der (1.), nämlich nicht in

$$5)\quad y=\tfrac{1}{2}ax^2+bx+a^2+b^2,$$

wo a und b die beiden willkührlichen Konstanten sind, als ein besonderes Integral enthalten ist. Findet man aber das allgemeine Integral der Gleichung (4.) nach (§. 266.), nämlich

---

*) Nach der später folgenden Nummer (XV. γ.) ist diese erstere Prüfung unnöthig.

6) $\sqrt{16y+4x^2+x^4} = x\cdot\sqrt{1+x^2} - log\,(\sqrt{1+x^2}-x)+c,$

wo c die willkührliche Konstante ist; so findet sich leicht *), daß diese Werthe von y aus (6.) für keine konstanten Werthe von a und b (welche im Allgemeinen Funktionen von c seyn müßten) aus den Werthen von y der Gleichung (5.) hervorgehen können, daß also die Gleichung (4.), und mithin ihr allgemeines Integral (6.), singuläre Werthe der gegebenen Differenzialgleichung (1.) der 2ten Ordnung liefern.

Beispiel 2. Aus der Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

1) $x\cdot(\partial^2 y)^2 - 2\partial y\cdot\partial^2 y + x = 0$

findet man durch Differenziiren

2) $$\partial^3 y = \frac{\partial^2 y^2 - 1}{2(x\cdot\partial^2 y - \partial y)}.$$

Setzt man nun hier Zähler und Nenner einzeln der Null gleich, so erhält man

3) $\partial^2 y^2 - 1 = 0$

und 4) $x\cdot\partial^2 y - \partial y = 0.$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen $\partial^2 y$, so ergiebt sich

5) $\partial y^2 - x^2 = 0$ oder $\partial y = \pm x,$

und da die Prüfung nachweist, daß dieser Werth aus (5.) wirklich allen 3 Gleichungen (3. 4. und 1.) genügt, und sein Integral

6) $y = \pm\frac{1}{2}x^2 + c$

in dem allgemeinen Ur-Integral der (1.), nämlich in

7) $\frac{1}{3}x^3 + a^2x + b - 2ay = 0$

nicht enthalten ist; so ist das Resultat (5. oder 6.) ein singulärer Werth, welcher in der Urform (6.) noch überdies eine willkührliche Konstante c in sich aufgenommen hat.

III. Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß die singulären Werthe einer Differenzialgleichung der 2ten Ordnung $F = 0$ in der Regel durch eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung

---

*) Setzt man nämlich den Werth y aus (5.) in (6.); so müßte aus der entstehenden Gleichung das x von selbst wegfallen, durch schickliche Annahme der Werthe für a und b. Dies ist aber hier offenbar nicht möglich, wenn man nicht statt a und b Funktionen von x (und c) setzen will, also nicht möglich, so lange a und b (nach x) konstant bleiben sollen.

$V_{x,y,y_1} = 0$ ausgedrückt seyn werden, welche dann integrirt werden kann, so daß man für y eine Funktion von x mit einer willkührlichen Konstante c erhält, die alle diese singulären Werthe in sich schließt *). In besondern Fällen dagegen kann schon aus der Gleichung $V = 0$ die Ableitung y_1 weggefallen seyn, so daß dann y als Funktion von x ohne willkührliche Konstante erscheint.

Aber genau so wie im (§. 270. III.), kann auch hier gezeigt werden, daß alle diese singulären Werthe $y = \psi_{x,c}$ von $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ auch aus dem allgemeinen Ur-Integral $f_{x,y,a,b} = 0$ dadurch hervorgehen, daß man für a und b schickliche Funktionen $a_{x,c}$, $b_{x,c}$ von x und c nimmt. Dagegen kann hier die eine dieser Funktionen z. B. $b_{x,c}$ ganz willkührlich genommen werden, wenn nur die andere dadurch gefunden wird, daß man aus $y = \psi_{x,c}$ und $f_{x,y,a,b} = 0$ y eliminirt, die entstehende Gleichung nach a auflöst, zu gleicher Zeit aber statt b die angenommene Funktion $b_{x,c}$ subſtituirt. — Aber eben weil $b_{x,c}$ beliebig genommen werden kann; so kann es auch (nach x) konstant genommen werden, während jedoch dann wenigstens a eine Funktion von x werden muß, wenn der Werth $y = \psi_{x,c}$ ein singulärer seyn soll.

IV. Hat man aber eines der allgemeinen ersten Integrale von $F = 0$, z. B.

1) $$\varphi_{x,y,y_1,b} = 0$$

mit der willkührlichen Konstante b, und sind die singulären Werthe von $F = 0$ bereits in der Ur-Gleichung

2) $$\psi_{x,y,c} = 0$$

enthalten; so muß, wenn man aus (2.) und ihrem Differenzial

3) $$\partial\psi_{(x)} = 0$$

---

*) Eine solche Gleichung der ersten Ordnung $V_{x,y,y_1} = 0$ kann selber wieder einen singulären Werth haben, welcher dann der doppelte singuläre Werth von $F = 0$ genannt wird. Später werden wir denselben noch besonders betrachten.

y und y_1 findet, und diese Werthe (in x und c ausgedrückt) in (1.), nämlich in $\varphi = 0$ substituirt, eine Gleichung zwischen b und x und c erscheinen, welche durch keinen (nach x) konstanten Werth von b identisch werden kann. Denn der Gleichung $\varphi = 0$ für jedes spezielle aber konstante b genügt nur das allgemeine Ur-Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten *); also kann ihr die Gleichung $\psi_{x,y,c} = 0$ für einen konstanten Werth von b nicht genügen, weil sie sonst in dem allgemeinen Ur-Integral als ein besonderes enthalten, also kein singulärer Werth seyn würde.

V. Es fragt sich jedoch, wie kann man prüfen, ob eine Gleichung von der Form

$$1) \qquad V_{x,y,y_1} = 0,$$

welche der Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

$$2) \qquad F_{x,y,y_1,y_2} = 0$$

genügt, wirklich eines der besondern ersten Integrale von $F = 0$ ist, oder ein singulärer Werth, so lange von $F = 0$ bloß ein einziges allgemeines erstes Integral

$$3) \qquad \varphi_{x,y,y_1,b} = 0$$

mit der willkührlichen Konstante b, keinesweges aber das allgemeine Ur-Integral mit seinen beiden willkührlichen Konstanten bekannt ist?

Wenn aber $V_{x,y,y_1} = 0$ eines der besondern ersten Integrale ist; so ist es (nach §. 274.) entweder aus dem allgemeinen ersten Integrale $\varphi_{x,y,y_1,b} = 0$ für einen konstanten Werth von

---

*) Es könnte zwar die Gleichung (1.) der ersten Ordnung nach (§. 270.) einen singulären Werth haben für irgend einen bestimmten konstanten Werth von b, und dieser könnte der durch $\psi_{x,y,c} = 0$ vorgestellte seyn, wenn nämlich c nicht vorkäme, was nach (III.) wohl möglich ist. Allein weil dann dieser Werth der Gleichung $\varphi = 0$ nur als Faktor genügte, so könnte er dann nicht zu gleicher Zeit ein singulärer Werth der Gleichung der 2ten Ordnung $F = 0$ seyn. (S. das Ende dieses Paragraphen).

b hervorgegangen, oder aus irgend einem andern der ersten allgemeinen Integrale, welches durch

$$4) \qquad M_{x,y,y_1,a} = 0$$

vorgestellt seyn mag, übrigens unbekannt ist, für einen konstanten Werth von a. Eliminirt man daher aus (1. und 3.) y_1; so müssen, im erstern Falle, y und x von selbst wegfallen, und die Eliminationsgleichung muß den konstanten Werth von b geben, welcher in das allgemeine erste Integral $\varphi_{x,y,y_1,b} = 0$ gesetzt werden muß, damit das besondere erste Integral $V_{x,y,y_1} = 0$ hervorgehe. Im andern Falle dagegen giebt die Elimination von y_1 aus $\varphi = 0$ und $V = 0$ dasselbe, was die Elimination von y_1 aus $\varphi = 0$ und $M = 0$ für denjenigen bestimmten konstanten Werth von a giebt, welcher $M = 0$ in $V = 0$ übergehen macht. Weil aber diese letztere Elimination im Allgemeinen (nach §. 274. IX.) dies allgemeine Ur-Integral

$$5) \qquad f_{x,y,a,b} = 0$$

mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b giebt; so liefert die Elimination des y_1 aus $\varphi = 0$ und $V = 0$ dasselbe allgemeine Ur-Integral mit den beiden Konstanten a und b, nur mit dem Unterschiede, daß a bereits einen bestimmten Werth angenommen hat, daß also die entstandene Gleichung

$$6) \qquad f_{x,y,b} = 0$$

zwischen x, y und b nur ein besonderes in dem allgemeinen enthaltenes Ur-Integral ist.

Wenn also die Elimination der Ableitung y_1 aus $\varphi_{x,y,y_1,b} = 0$ und $V_{x,y,y_1} = 0$ entweder b konstant giebt (so daß y und x zugleich mit wegfallen), oder eine Gleichung zwischen x, y und b giebt, welche als ein besonderes Ur-Integral angesehen werden kann, d. h. welches der Gleichung $\varphi = 0$ genügt: so ist die Gleichung $V_{x,y,y_1} = 0$, voraus gesetzt, daß sie der $F = 0$ genügt, ein besonderes Integral; wenn aber keiner dieser beiden Fälle sich ereignet, so ist $V_{x,y,y_1} = 0$ nur ein singulärer Werth *).

---

*) Diese Zergliederung berichtigt zugleich das, was hierüber in der „Zeitschrift für Physik und Mathematik" 5. Band. Wien 1829. pag. 32.

Beispiel. Von der Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

$$1) \qquad x \cdot \partial^2 y + 2 \cdot \partial y = 0$$

sey das allgemeine erste Integral

$$2) \qquad x^4 \cdot \partial y^2 - 2ax^2 \cdot \partial y + a^2 = y + x \cdot \partial y$$

gegeben, und von dem Werthe

$$3) \qquad y + x \cdot \partial y = 0$$

habe man sich überzeugt, daß er der Gleichung (1.) genügt. Will man nun wissen, ob er ein singulärer Werth oder ein besonderes Integral der (1.) ist; so eliminire man aus (2. und 3.) die Ableitung ∂y, und man erhält

$$4) \quad x^2 y^2 + 2axy + a^2 = 0 \quad \text{oder} \quad xy + a = 0.$$

Weil nun $xy + a = 0$ dem allgemeinen ersten Integral (2.) auch genügt, so ist $xy + a = 0$ in der That ein besonderes Ur-Integral; also ist die Gleichung (3.) nothwendig ebenfalls ein besonderes Integral und kein singulärer Werth.

VI. Ist aber wiederum von

$$1) \qquad F_{x,y,y_1,y_2} = 0$$

das allgemeine Ur-Integral

$$2) \qquad f_{x,y,a,b} = 0,$$

und giebt man den beiden allgemeinen ersten Integralen, welche aus $f = 0$ und

$$3) \quad \partial f_{(x)} = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y = 0$$

durch abwechselnde Elimination von b und a hervorgehen, die Form

$$4) \quad a = \varphi_{x,y,y_1} \qquad \text{und} \qquad 5) \quad b = \mu_{x,y,y_1};$$

und findet man ferner aus (1.)

$$6) \qquad \partial^2 y = (\pi_2)_{x,y,y_1}:$$

so sind nach (§. 274. XI.) die Gleichungen

---

zu finden ist. Der Verfasser des angeführten Aufsatzes scheint nicht bemerkt zu haben, daß das, was er für a erhält, eine Funktion von x und ∂y ist, die nicht bloß konstant seyn kann, sondern in seinem Beispiele wirklich konstant ist. Der angeführte Aufsatz selbst bleibt aber deshalb immer lesenswerth.

$$7)\quad \partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y + \pi_2 \cdot \partial\varphi_{y_1} = 0$$

und $$8)\quad \partial\mu_x + \partial\mu_y \cdot \partial y + \pi_2 \cdot \partial\mu_{y_1} = 0$$

identisch nach y_1, nach y und auch nach x, also identisch, wenn für y jede Funktion von x, folglich auch identisch, wenn statt y jeder der singulären Werthe

$$9)\quad y = \psi_{x,c}$$

gesetzt wird. Derselbe singuläre Werth, statt y gesetzt, macht aber nach (IV.)

$$10)\quad \varphi_{x,y,y_1} = a_x \quad \text{und} \quad \mu_{x,y,y_1} = b_x,$$

also, (wenn man diese Gleichungen nach allem x differenziirt)

$$11)\quad \partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y + \partial\varphi_{y_1} \cdot \partial^2 y = \partial a_x,$$

$$12)\quad \partial\mu_x + \partial\mu_y \cdot \partial y + \partial\mu_{y_1} \cdot \partial^2 y = \partial b_x;$$

mithin, wenn man (7. und 8.) zu Hilfe nimmt, noch

$$13)\quad -\pi_2 + \partial^2 y = \partial a_x \cdot \frac{1}{\partial\varphi_{y_1}}$$

$$14)\quad -\pi_2 + \partial^2 y = \partial b_x \cdot \frac{1}{\partial\mu_{y_1}};$$

zu gleicher Zeit aber die (1.) endlich also die (6.) d. h.

$$15)\quad -\pi_2 + \partial^2 y = 0,$$

identisch. Demnach werden auch noch durch diesen singulären Werth

$$16)\ \partial a_x \cdot \frac{1}{\partial\varphi_{y_1}} = 0 \quad \text{und} \quad 17)\ \partial b_x \cdot \frac{1}{\partial\mu_{y_1}} = 0$$

d. h. $$18)\quad \frac{1}{\partial\varphi_{y_1}} = 0 \quad \text{und} \quad 19)\quad \frac{1}{\partial\mu_{y_1}} = 0$$

identisch, weil ∂a_x und ∂b_x nicht Null seyn können.

Man kann daher die singulären Werthe, welche der Gleichung der 2ten Ordnung $F = 0$ zukommen, alle aus einem allgemeinen ersten Integral von $F = 0$ finden, wenn man letzteres auf die Form

$$\varphi_{x,y,y_1} = a$$

bringt, und dann

$$\frac{1}{\partial\varphi_{y_1}} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial\varphi_{y_1} = \frac{1}{0}$$

macht, nachher aber alle aus dieser letztern Gleichung hervorgehenden Werthe prüft:

1) ob sie der $F = 0$ genügen,

2) ob sie wirklich nicht in dem allgemeinen Ur-Integral, oder in einem der allgemeinen ersten Integrale, als besondere Integrale enthalten sind.

(Vgl. §. 270. IV.).

VII. Es fällt aber in die Augen, daß die Gleichungen (2. und 3.) nach y_1, nach y und nach x identisch werden müssen, wenn man in ihnen statt a und b die Funktionen φ_{x,y,y_1} und μ_{x,y,y_1} der (4. und 5.) substituirt. Dann sind aber auch ihre Ableitungen nach allem y_1 identische Gleichungen, nämlich, wenn der Kürze wegen

19) $\partial f_{(x)}$ oder $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y$ durch $f'_{x,y,a,b}$

bezeichnet wird,

20) $$\partial f_a \cdot \partial\varphi_{y_1} + \partial f_b \cdot \partial\mu_{y_1} = 0,$$

21) $$\partial f'_{y_1} + \partial f'_a \cdot \partial\varphi_{y_1} + \partial f'_b \cdot \partial\mu_{y_1} = 0,$$

wo unter a und b beziehlich φ und μ gedacht werden muß. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber sogleich

22) $$\frac{1}{\partial\varphi_{y_1}} = \frac{\partial f_a \cdot \partial f'_b - \partial f_b \cdot \partial f'_a}{\partial f_b \cdot \partial f'_{y_1}},$$

23) $$\frac{1}{\partial\mu_{y_1}} = -\frac{\partial f_a \cdot \partial f'_b - \partial f_b \cdot \partial f'_a}{\partial f_a \cdot \partial f'_{y_1}},$$

wenn nur unter a die Funktion φ, unter b dagegen die Funktion μ gedacht wird. Da nun jeder singuläre Werth von $F = 0$ nicht bloß $\frac{1}{\partial\varphi_{y_1}}$, sondern auch $\frac{1}{\partial\mu_{y_1}}$ zu Null machen muß, so macht auch jeder singuläre Werth

entweder 24) $$\frac{1}{\partial f'_{y_1}} = 0$$

oder doch 25) $$\partial f_a \cdot \partial f'_b - \partial f_b \cdot \partial f'_a = 0.$$

Man wird daher keinen der singulären Werthe verfehlen, wenn man sie sowohl aus (24.), zu gleicher Zeit aber auch aus (25.) sucht, nachdem vorher φ_{x,y,y_1} statt a und μ_{x,y,y_1} statt b gesetzt worden ist, d. h. nachdem vorher

sowohl aus (24.) in Verbindung mit $f = 0$ und $f' = 0$,

als auch aus (25.) in Verbindung mit $f = 0$ und $f' = 0$

a und b selbst eliminirt, und diese neuen Gleichungen statt der (24.) und (25.) genommen worden sind.

Und hat man der Gleichung $f' = 0$ die Form gegeben, nach der die Gleichung (24.) durchaus nichts geben kann, (z. B. wenn man $f' = 0$ nach y_1 aufgelöst hat, so daß

$$f' = y_1 + \nu_{x,y,a,b}, \quad \text{also} \quad \partial f'_{y_1} = 1$$

wird); so sind alle singulären Werthe von $F = 0$ aus der Gleichung (25.) allein herzuholen. (Vgl. §. 270. VI.).

Beispiel. Von der Gleichung

$$1) \qquad \partial^2 y^2 - 2\,\frac{\partial y \cdot \partial^2 y}{x} + 1 = 0$$

ist

$$2) \qquad x^2 + 3a^2 + \frac{3b - 6ay}{x} = 0 = f$$

das allgemeine Ur-Integral, und wenn man letzteres differenziirt, so erhält man

$$3) \qquad 2x - \frac{6a\partial y}{x} - \frac{3b - 6ay}{x^2} = 0 = f'.$$

Also hat man

$$\partial f_a = 6a - \frac{6y}{x}, \qquad \partial f_b = \frac{3}{x}$$

$$\partial f'_a = -\frac{6\partial y}{x} + \frac{6y}{x^2}, \qquad \partial f'_b = -\frac{3}{x^2}.$$

Die Gleichung (25) wird daher jetzt

$$-\left(a - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{\partial y}{x^2} - \frac{y}{x^3} = 0$$

d. h. $$4) \qquad -a + \partial y = 0.$$

Eliminirt man daher nun aus (2. 3. und 4.) a und b; so erhält man den singulären Werth

$$5) \qquad \partial y^2 - x^2 = 0,$$

welcher der Gleichung (1.) genügt, ohne in dem allgemeinen Ur-Integral (2.) enthalten zu seyn, weil sein Integral

6) $$y = \pm\tfrac{1}{2}x^2 + c$$ ist.

VIII. Analog mit der (VII. des §. 270.) hätte man auch so schließen können: Die Ableitung von

1) $$f_{x,y,a,b} = 0$$

ist, wenn a und b konstant sind,

2) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y = 0,$$

welche durch

3) $$f'_{x,y,a,b} = 0$$

vorgestellt seyn mag; dagegen, wenn a und b selbst noch als Funktionen von x gedacht werden,

4) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_a \cdot \partial a_x + \partial f_b \cdot \partial b_x = 0;$$

also genau dieselbe, wie vorher, so oft a_x und b_x solche Funktionen von x sind, daß

5) $$\partial f_a \cdot \partial a_x + \partial f_b \cdot \partial b_x = 0$$

wird. — Die Ableitung von $f' = 0$, also die zweite Ableitung von $f = 0$, welche durch

6) $$f''_{x,y,a,b} = 0$$

vorgestellt seyn mag, bleibt daher wieder, der Form nach dieselbe, man mag a und b konstant, oder als solche Funktionen von x ansehen, welche

7) $$\partial f'_a \cdot \partial a_x + \partial f'_b \cdot \partial b_x = 0$$

machen. Also genügt die Gleichung (1.) der ihr zugehörigen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, man mag a und b als konstant, oder als solche Funktionen von x sich denken, welche der (5. und 7.) also auch der

8) $$\partial f_a \cdot \partial f'_b - \partial f_b \cdot \partial f'_a = 0.$$

entsprechen, welche Gleichung (8.) aus (5. und 7.) hervorgeht, wenn man ∂b_x eliminirt, wobei ∂a_x von selber sich weghebt.

Daß aber diese Schlußweise viel weniger leistet, als das Verfahren der vorhergehenden Nummer (VII.) fällt unmittelbar in die Augen.

Beispiel. Von der Differenzialgleichung

1) $y - x \cdot \partial y + \frac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y - (\partial y - x \cdot \partial^2 y)^2 - \partial^2 y^2 = 0$

ist das allgemeine Ur-Integral

2) $y - \frac{1}{2} a x^2 - b x - a^2 - b^2 = 0 = f.$

Dieselbe nach dem x differenziirt, was in a und b steckt, giebt die Gleichung (5.) des Textes, nämlich

3) $-\frac{1}{2} x^2 \cdot \partial a_x - x \cdot \partial b_x - 2a \cdot \partial a_x - 2b \cdot \partial b_x = 0,$

während die Differenzialgleichung von (2.) unter der Voraussetzung, daß a und b konstant sind,

4) $\partial y - a x - b = 0 = f'$

seyn wird, so daß deren Differenzial nach allem x, was in a und b steckt,

5) $-x \cdot \partial a_x - \partial b_x = 0$

ist. Und dieses ist die Gleichung (7.) des Textes. Eliminirt man nun aus (3. und 5.) die Ableitung ∂b_x; so erhält man die

6) $\frac{1}{2} x^2 - 2a + 2bx = 0,$

und dieses ist die Gleichung (8.) des Textes. Eliminirt man aber aus (6. und 4. und 2.) sowohl a als auch b, so erhält man den singulären Werth

$$(1 + x^2) \cdot y - (x + \tfrac{1}{2} x^3) \cdot \partial y - \partial y^2 + \tfrac{1}{16} x^4 = 0.$$

IX. Aber auch auf ein allgemeines erstes Integral von

1) $F_{x,y,y_1,y_2} = 0,$

welches durch

2) $M_{x,y,y_1,a} = 0$

bezeichnet, und aus welchem

3) $a = \varphi_{x,y,y_1}$

gefunden seyn mag, kann man ähnliche Schlüsse anwenden. Die Gleichung (2.) wird nach y_1 identisch, sobald man φ statt a setzt. Dann ist aber auch die Ableitung der (2.) nach allem y_1 eine identische Gleichung d. h.

4) $\partial M_{y_1} + \partial M_a \cdot \partial \varphi_{y_1} = 0,$

wenn nur φ unter a gedacht wird. Also hat man auch

5) $\frac{1}{\partial \varphi_{y_1}} = -\frac{1}{\partial M_{y_1}} \cdot \partial M_a.$

Jeder singuläre Werth von $F = 0$, da er nach (VI.) nothwendig $\frac{1}{\partial \varphi_{y_1}} = 0$ machen muß, wird also erhalten, wenn man

erstens aus $M_{x,y,y_1,a} = 0$ und $\partial M_a = 0$,

zweitens aus $M_{x,y,y_1,a} = 0$ und $\frac{1}{\partial M_{y_1}} = 0$

jedesmal a eliminirt, und alle Resultate prüft, ob sie, und welche darunter, den Bedingungen der singulären Werthe entsprechen.

α) Hat man der Gleichung $M = 0$ eine Form gegeben, so daß $\partial M_a = 0$ nichts liefern kann, (z. B. wenn solche Gleichung nach a aufgelöst seyn sollte); so werden alle singulären Werthe bloß aus

$$\frac{1}{\partial M_{y_1}} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial M_{y_1} = \frac{1}{0}$$

herzuholen seyn. (Vgl. VI.).

β) Und hat man der Gleichung $M = 0$ (in 2.) eine Form gegeben, so daß $\frac{1}{\partial M_{y_1}} = 0$ nichts liefern kann (z. B. wenn sie nach y_1 aufgelöst worden wäre); so sind dann alle singulären Werthe bloß aus $\partial M_a = 0$ herzuholen. (Vgl. (§. 270. VI.) Auch könnte man hier noch nach (§. 270. VII.) das so eben in (β.) Gefundene a posteriori bestätigen lassen, analog dem Gange, den man hier wiederum in (VIII.) genommen hat.).

Da übrigens jedes allgemeine erste Integral unter $M = 0$ gedacht werden kann, und da man doch immer alle existirenden singulären Werthe erhält; so folgt, daß jedes beliebige der allgemeinen ersten Integrale, nach der vorstehenden Methode behandelt, zu denselben singulären Werthen führt.

Beispiel. Von der Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

1) $$\partial^2 y^2 - 2\frac{\partial y \cdot \partial^2 y}{x} + 1 = 0$$

ist

2) $$\tfrac{1}{3}x^3 - 2ay + a^2 x + b = 0$$

das allgemeine Ur-Integral, und

3) $x^2 - 2a\partial y + a^2 = 0$,

so wie

4) $4x^2(y - x\cdot\partial y)^2 - 4(b - \frac{2}{3}x^3)(y - x\cdot\partial y)\cdot\partial y + (b - \frac{2}{3}x^3)^2 = 0$

sind zwei allgemeine erste Integrale derselben. Differenziirt man nun die (3.) nach a, so daß man

5) $-\partial y + a = 0$

erhält, und eliminirt man dann aus (3. und 5.) dieses a, oder differenziirt man die (4.) nach b, so daß

6) $-4(y - x\cdot\partial y)\cdot\partial y + 2(b - \frac{2}{3}x^3) = 0$

sich ergiebt, und eliminirt man dann aus (4. und 6.) dieses b; so erhält man in beiden Fällen einen und denselben singulären Werth

7) $\partial y^2 - x^2 = 0$,

welcher der gegebenen Differenzialgleichung genügt, ohne daß er oder sein Integral

8) $y = \pm\frac{1}{2}x^2 + c$

in dem allgemeinen Ur-Integral (2.) enthalten wäre.

X. Auch die Lehre des (§. 270. VIII.) läßt sich hier erweitert geben. Ist nämlich von

1) $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$

ein allgemeines erstes Integral durch

2) $M_{x,y,y_1,a} = 0$

vorgestellt; so erhält man $F = 0$, wenn man aus $M = 0$ und ihrer Ableitung, nämlich

3) $\partial M_{(x)} = 0$ d. h. $\partial M_x + \partial M_y\cdot\partial y + \partial M_{y_1}\cdot\partial^2 y = 0$

die willkührliche Konstante a eliminirt, so daß $F = 0$ schon durch die Gleichung (2.) vorgestellt ist, sobald man unter a die aus (3.) für a gezogene Funktion φ_{x,y,y_1,y_2} versteht, indem man nämlich die Gleichung (3.) nach a auflöst, und

4) $a = \varphi_{x,y,y_1,y_2}$

erhält. Differenziirt man nun diese Gleichung (2.) unter dieser Voraussetzung, unter welcher sie die $F = 0$ vorstellt; so erhält man die Gleichung der dritten Ordnung, nämlich

5) $\partial M_x + \partial M_y\cdot\partial y + \partial M_{y_1}\cdot\partial^2 y + \partial M_a\cdot\partial\varphi_{(x)} = 0$,

wenn nur überall unter a die Funktion φ_{x,y,y_1,y_2} verstanden wird, so daß, weil dann die 3 ersten Glieder in (5.), der Gleichung (3.) zu Folge, zusammen der Null gleich sind, die Gleichung der 3ten Ordnung in (5.) bloß auf

$$6) \qquad \partial M_a \cdot \partial \varphi_{(x)} = 0$$

sich zurückzieht, wo der erste Faktor ∂M_a, weil er bloß aus x,y,y_1 und a d. h. φ_{x,y,y_1,y_2} zusammengesetzt ist, die dritte Ableitung $\partial^3 y$ nicht enthält, und bloß der andere Faktor

$\partial \varphi_{(x)}$ d. h. $\partial \varphi_x + \partial \varphi_y \cdot \partial y + \partial \varphi_{y_1} \cdot \partial^2 y + \partial \varphi_{y_2} \cdot \partial^3 y$

bis zur dritten Ordnung $\partial^3 y$ steigt.

Dieses gilt, welche Form man der Gleichung (2.) gegeben haben mag, also auch wenn sie eine solche Form hat, daß die Elimination des a aus

$$7) \qquad M = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial M_a = 0$$

(nach IX.) alle singulären Werthe liefern muß, welche letztgedachte Form wir nun für sie annehmen wollen. Nun ist es aber einerlei, ob man die Elimination in (7.) verrichtet, oder ob man den Faktor in (6.) nämlich

$$8) \qquad [\partial M_a]_\varphi = 0$$

nimmt, und aus dieser Gleichung (welche $\partial^3 y = \frac{0}{0}$ macht) und der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung (hier unter der Form der

$$2) \quad M_{x,y,y_1,a} = 0, \qquad \text{wo} \qquad a = \varphi_{x,y,y_1,y_2}$$

ist, vorgestellt) y_2 eliminirt, weil solches y_2 nur in φ allein vorkommt, also nur φ allein zu eliminiren ist, während es wiederum einerlei ist, ob man aus $[M_a]_\varphi = 0$ und $[\partial M_a]_\varphi = 0$ die Funktion φ oder sogleich aus $M_a = 0$ und $\partial M_a = 0$ die Konstante a eliminirt.

Also ist es allemal möglich, die gegebene Differenzialgleichung $F = 0$ auf eine solche Form zu bringen, daß ihre Ableitung (welche eine Differenzialgleichung der dritten Ordnung ist) die Form (6.) annehmen kann, also daß der erste Faktor davon

$$[\partial M_a]_\phi = 0$$

alle singulären Werthe liefert.

Beispiel. Giebt man der Differenzialgleichung

1) $$x \cdot \partial^2 y^2 - 2\partial y \cdot \partial^2 y + x = 0$$

die Form

2) $$\partial^2 y^2 - 2\frac{\partial y \cdot \partial^2 y}{x} + 1 = 0,$$

und differenziirt man sie in dieser Form; so erhält man

3) $$2\left(\partial^2 y - \frac{\partial y}{x}\right) \cdot \left(\partial^3 y - \frac{\partial^2 y}{x}\right) = 0,$$

wo der erste Faktor

4) $$\partial^2 y - \frac{\partial y}{x} = 0$$

nur von der zweiten Ordnung ist, und in Verbindung mit der (1. oder 2.) selbst zu dem singulären Werth

5) $$\partial y^2 - x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad y = \pm\tfrac{1}{2}x^2 + c$$

führt, während das allgemeine Integral derselben Gleichung (1. oder 2.)

6) $$\tfrac{1}{3}x^3 + a^2 x + b - 2ay = 0$$ ist.

XI. Daraus folgt aber:

1) Jeder singuläre Werth einer gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung bringt nothwendig den (nach §. 272.) für $\partial^3 y$ aus letzterer gefundenen Ausdruck auf die Form $\frac{0}{0}$. Alle singulären Werthe ohne Ausnahme ergeben sich also aus $\partial^3 y = \pi_3 = \frac{0}{0}$, und es ist nicht nöthig, daß man, um sicher zu seyn, daß keiner der vorhandenen singulären Werthe übergangen wird, auch noch zu $\partial^4 y = \frac{0}{0}$, $\partial^5 y = \frac{0}{0}$ ꝛc. seine Zuflucht nehme. (Vgl. §. 270. IX.).

2) Jeder singuläre Werth einer solchen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung ist allemal ein, dem Zähler und Nenner von $\partial^3 y$ oder $(\pi_3)_{x,y,y_1}$ gemeinschaftlicher Faktor, im Allgemeinen eine Funktion von x, y und y_1, im besondern

aber auch wohl bloß eine Funktion von x und y, welcher Faktor der Null gleich gesetzt wird.

XII. Jeder singuläre Werth von

1) $$F_{x,y,y_1,y_2} = 0$$

findet sich wieder, analog dem Verfahren (§. 270. X.), wenn man aus $F = 0$ herstellt

2) $$\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y,y_1},$$

und dann

3) $$\frac{1}{\partial(\pi_2)_{y_1}} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial(\pi_2)_{y_1} = \frac{1}{0}$$

nimmt.

Denkt man sich nämlich, wie in (X.) die Gleichung $F = 0$ in der Form ihres allgemeinen ersten Integrals

4) $$M_{x,y,y_1,a} = 0$$

vorgestellt, wo

5) a die Funktion φ_{x,y,y_1,y_2} bedeutet,

welche aus

6) $$\partial M_{(x)} = 0$$

erhalten wird, wenn man letztere nach a auflöst; so erhält man eine nach y_1 identische Gleichung, sobald man in (4.) statt y_2 oder $\partial^2 y$ die Funktion $(\pi_2)_{x,y,y_1}$ setzt. Dann ist auch die Ableitung von (4.) nach y_1 eine identische Gleichung, nämlich

7) $$\partial M_{y_1} + \partial M_a \cdot (\partial \varphi_{y_1} + \partial \varphi_{y_2} \cdot \partial(\pi_2)_{y_1}) = 0,$$

also

8) $$\partial(\pi_2)_{y_1} = \frac{-\frac{\partial M_{y_1}}{\partial M_a} - \partial \varphi_{y_1}}{\partial \varphi_{y_2}}.$$

Da nun jeder singuläre Werth die Gleichung $[\partial M_a]_\phi = 0$ identisch macht (nach XII.), so folgt aus (8.) das Behauptete.

XIII. Dieser eben bewiesene Lehrsatz läßt sich auch umkehren, analog dem (§. 270. XI.), d. h. es gilt auch dieser andere Satz: Jeder der aus (3.) nämlich aus

$$\partial(\pi_2)_{y_1} = \frac{1}{0} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\partial(\pi_2)_{y_1}} = 0$$

gezogene Werth von y, welcher der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ wirklich genügt, ist nothwendig ein singulärer Werth, bedarf deshalb keiner weitern Prüfung mehr, weil er nie ein besonderes Integral seyn kann.

Denn es sey das allgemeine erste Integral von $F = 0$ durch

1) $$y_1 = V_{x,y,a}$$

dagegen der Werth, welcher ebenfalls der $F = 0$, d. h. der

2) $$\partial^2 y = (\pi_2)_{x,y,y_1} \quad \text{oder} \quad y_2 = (\pi_2)_{x,y,y_1}$$

genügt, zugleich aber auch $\partial(\pi_2)_{y_1}$ auf die Form $\frac{1}{0}$ bringt, durch

3) $$y_1 = \psi_{x,y}$$

vorgestellt; so müssen beide Gleichungen (1. und 3.) der Gleichung (2.) genügen, also daß man hat

4) $$\partial V_x + \partial V_y \cdot V = (\pi_2)_{x,y,V}$$

5) $$\partial \psi_x + \partial \psi_y \cdot \psi = (\pi_2)_{x,y,\psi}$$ *)

also auch, wenn man (5.) von (4.) subtrahirt

6) $$\partial(V-\psi)_x + \partial V_y \cdot V - \partial \psi_y \cdot \psi = (\pi_2)_{x,y,V} - (\pi_2)_{x,y,\psi}.$$

Wäre nun (3.) d. h. $y_1 = \psi_{x,y}$ ein besonderes Integral; so könnte man sich unter (1.) dasjenige allgemeine erste Integral vorgestellt denken, welches für den bestimmten Werth α von a in das besondere (3.) überginge, und dann wäre

7) $$\psi_{x,y} = V_{x,y,\alpha}$$

als eine nach x und nach y identische Gleichung anzusehen, und wenn

8) $a = \alpha + h$ gesetzt wird, $V_{x,y,a} = V_{x,y,\alpha+h}$

so daß h die willkührliche Konstante, α aber der besondere Werth von a ist für $h = 0$.

---

*) Man übersehe nicht, daß in (4.) der Buchstabe y eine ganz andere Bedeutung hat, als in der Gleichung (5.), daß also in der Gleichung (6.) zwei verschiedene y erscheinen, die sich jedoch in (4.) sowohl als in (5.) gegenseitig aufheben und vernichten, so daß die weiter folgenden Schlüsse durch diesen Umstand nichts leiden, sondern ihre Bündigkeit behalten.

Nun läßt sich offenbar $V_{x,y,a}$ d. h. $V_{x,y,\alpha+h}$, was oben immer bloß durch V vorgestellt ist, in eine nach positiven steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickeln, so daß man hat

9) $V-\psi = V_1 \cdot h^m + \cdots = k$, also $V = \psi + k$,

10) $\partial V_y - \partial \psi_y = \partial (V_1)_y \cdot h^m + \cdots$,

11) $\partial (V-\psi)_x = \partial (V_1)_x \cdot h^m + \cdots$,

Auf der andern Seite wird der Ausdruck zur Rechten in (6.) offenbar geschrieben werden können

12) $[(\pi_2)_{y_1}]_{\psi+k} - [(\pi_2)_{y_1}]_{\psi}$ *);

also läßt sich derselbe in eine Reihe nach positiven steigenden Potenzen von k entwickeln, welche mit der niedrigsten Potenz

13) $P \cdot k^\mu$ beginnt, wo $\mu < 1$

ist, weil, nach der Voraussetzung, schon $[\partial(\pi^2)_{y_1}]_{\psi} = \frac{1}{0}$ ist, (nach IV. Th. d. S. §. 101.). Dann ist aber derselbe Ausdruck (12.) zu gleicher Zeit in eine nach positiven steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe zu verwandeln, deren erstes Glied aus (13.) und (9.) offenbar

14) $P \cdot (V_1)^\mu \cdot h^{\mu m}$ ist, wo $\mu < 1$.

Setzt man nun diese Werthe aus (9. 10. 11. und 14.) in die Gleichung (6.), so erhält man

15) $\partial (V_1)_x \cdot h^m + \cdots + \psi \cdot (\partial (V_1)_y \cdot h^m + \cdots) +$
$+ V_1 h^m \cdot (\partial \psi_y + \partial (V_1)_y \cdot h^m + \cdots) = P \cdot (V_1)^\mu \cdot h^{\mu m} + \cdots$

Diese Gleichung, welche man unter der Voraussetzung erhalten hat, daß h konstant ist, enthält aber einen Widerspruch, weil zur Linken h^m die niedrigste Potenz von h ist, während zur Rechten $h^{\mu m}$, wegen $\mu < 1$, eine noch niedrigere seyn muß, und der Koeffizient derselben nicht Null ist.

Die Annahme, daß der aus $\partial(\pi_2)_{y_1} = \frac{1}{0}$ hervorgegangene Werth $y_1 = \psi_{x,y}$, welcher der $F = 0$ oder $\partial^2 y = \pi_2$ genügt, ein besonderes Integral von $F = 0$ sey, führt also zu einem Widerspruch. Demnach ist solcher Werth ein bloßer singulärer Werth von $F = 0$.

---

*) Nach (§. 204.) bedeutet das Zeichen $[(\pi_2)_{y_1}]_{\psi+k}$, daß π_2 eine Funktion von y_1 ist, und daß $\psi + k$ statt y_1 gesetzt werden soll.

XIV. Jede Differenzialgleichung der 2ten Ordnung läßt sich durch Einführung eines neuen Veränderlichen allemal so umformen, daß die singulären Werthe alle als Faktoren (der ersten Ordnung), mithin von dem Faktor der 2ten Ordnung ganz unabhängig erschienen. Alle singulären Werthe einer solchen Gleichung der 2ten Ordnung gehören daher, dem Wesen nach, zu der (in I. betrachteten) ersten Gattung.

Ist nämlich

1) $$\partial^2 y = P_{x,y,\partial y}$$

die gegebene Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, und

2) $$\partial y = \varphi_{x,y,a}$$

eines ihrer allgemeinen ersten Integrale; so ist, wenn man (2.) differenziirt und in (1.) substituirt

3) $$\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \varphi = P_{x,y,\varphi}$$

eine, nach x, nach y und nach a identische Gleichung. Führt man nun einen neuen Veränderlichen z ein, gegeben durch die Gleichung

4) $$\partial y = \varphi'_{x,y,z'}$$

wo sich $\varphi'_{x,y,z}$ von $\varphi_{x,y,a}$ in (2.) nur dadurch unterscheiden soll, daß, wo dort a, hier z steht; so hat man

5) $$\partial^2 y = \partial\varphi'_x + \partial\varphi'_y \cdot \partial y + \partial\varphi'_z \cdot \partial z.$$

Setzt man aber diese Werthe aus (4. und 5.) für ∂y und $\partial^2 y$ in die (1.), so erhält man dieselbe Differenzialgleichung (1.) jetzt in dieser neuen Gestalt

6) $$\partial\varphi'_x + \partial\varphi'_y \cdot \varphi' + \partial\varphi'_z \cdot \partial z = P_{x,y,\varphi'}$$

Aus (3.) folgt dagegen, wenn z statt a gesetzt wird,

7) $$\partial\varphi'_x + \partial\varphi'_y \cdot \varphi' = P_{x,y,\varphi'}$$

als eine nach x, nach y und nach z identische Gleichung. Subtrahirt man daher diese von der (6.), so erhält die Differenzialgleichung (1. oder 6.) jetzt die Form

8) $$\partial\varphi'_z \cdot \partial z = 0.$$

Der zweite Faktor $\partial z = 0$ giebt $z = \text{Const} = a$, also die Integralgleichung in y, wenn aus $z = a$ und der (4.) z selbst eliminirt wird, wodurch man offenbar das allgemeine erste Integral (2.) wiederum erhält. — Der erste Faktor von (8.) dagegen giebt

9) $$\partial\varphi'_z = 0$$

oder, wenn man die Gleichung in y haben will, das was aus (9.) und (4.) durch Elimination von z hervorgeht. Diese Eliminationsgleichung ist aber offenbar dieselbe, welche auch aus (2.) d. h. aus

10) $$-\partial y + \varphi_{x,y,a} = 0$$

und ihrer Ableitung nach a, nämlich

11) $$\partial\varphi_a = 0$$

hervorgeht, wenn a eliminirt wird. Weil aber dieses letztere Verfahren nach (IX.) alle singulären Werthe der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung liefert; so folgt, daß die neue Form (8.) der letztern diejenige ist, von welcher oben gesprochen worden, und welche alle singulären Werthe im ersten Faktor $\partial\varphi'_z$ enthält, d. h. gerade in dem Faktor, der, wenn man die z fortschaft, nach y bloß von der 1sten Ordnung ist, während der andere Faktor $\partial z = 0$, wenn man für z seinen Werth aus (4.) in x, y und ∂y setzt, nur allein als die eigentliche Differenzialgleichung der 2ten Ordnung angesehen werden kann. (Vgl. §. 270. XII.)

XV. Aus dieser Deduktion folgt wieder, wie in (§. 270. XIV.):

α) Ist das allgemeine erste Integral von $F_{x,y,y_1,y_2} = 0$ durch

1) $$y_1 = \varphi_{x,y,a}$$

vorgestellt, und enthält

2) $$\partial\varphi_a = 0$$

noch a wirklich; so genügt der aus (1. und 2.) durch Elimination der Konstante a gezogene Werth

3) $\quad V_{x,y,y_1} = 0$

allemal der $F = 0$ wirklich.

β) In dem Falle also, daß der singuläre Werth nach der Regel (IX. β) gefunden werden soll, ist eine besondere Prüfung, ob der aus

$$\varphi_{x,y,y_1,a} = 0 \quad \text{und} \quad \partial\varphi_a = 0$$

durch Elimination des a erhaltene Werth

$$V_{x,y,y_1} = 0$$

auch wirklich der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ genügen werde, nicht nöthig.

γ) Wenn man die singulären Werthe nach der Regel (II.) d. h. dadurch findet, daß man $\partial^3 y = \frac{0}{0}$ nimmt, so ist eine besondere Prüfung, ob auch wirklich der $F = 0$ genügt sey, ebenfalls unnöthig.

XVI. Man kann daher, wie in (§. 270. XV.) geschehen ist, beliebig viel Differenzialgleichungen der 2ten Ordnung aufsuchen, welche einen und denselben gegebenen singulären Werth $V_{x,y,y_1} = 0$ haben, dadurch, daß man eine beliebige Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

$$P_{x,y,y_1} + Q_{x,y,y_1} \cdot \partial^2 y = 0$$

mit V_{x,y,y_1} multiplizirt, und dann einen neuen Veränderlichen z so einführt, daß in der Gleichung

$$V \cdot P + V \cdot Q \cdot \partial^2 y = 0$$

der Faktor V nicht mehr als solcher sichtbar ist.

Man kann aber auch das Verfahren des Lagrange (§. 270. XVI.) hier statt finden lassen. Man geht nämlich von einer Ur-Gleichung

1) $\quad f_{x,y,a,b,c} = 0$

aus, findet aus ihr und ihren beiden Ableitungs-Gleichungen

2) $\partial f_{(x)} = 0$, $\quad$ 3) $\partial^2 f_{(x)} = 0$

a, b, c in x, y, y_1 und y_2 ausgedrückt, nämlich

4) $a = \mu_{x,y,y_1,y_2'}$ 5) $b = \nu_{x,y,y_1,y_2'}$ 6) $c = \varphi_{x,y,y_1,y_2'}$.

Hernach nimmt man aus dem gegebenen singulären Werth

7) $$V_{x,y,y_1} = 0$$

und dessen Differenzial

8) $$\partial V_{(x)} = 0,$$

sowohl y_1 als auch y_2 in x und y ausgedrückt, setzt diese Werthe in die vorhin für a, b, c erhaltenen Ausdrücke (4.—6.), so wird man die 3 Gleichungen

8) $a = a_{x,y}$, 9) $b = b_{x,y}$, 10) $c = c_{x,y}$

erhalten. Eliminirt man nachgehends x und y aus diesen letztern 3 Gleichungen; so erhält man eine Gleichung

11) $$\varphi_{a,b,c} = 0,$$

die zeigt, welche Funktion von a und b man statt c in

1) $$f_{x,y,a,b,c} = 0$$

gesetzt denken muß, damit aus dieser Gleichung und aus

2) $\partial f_{(x)} = 0$ und 3) $\partial^2 f_{(x)} = 0$

diejenige Differenzialgleichung der 2ten Ordnung (durch Elimination von allem a und b) hervorgehe, welche den gegebenen singulären Werth

7) $$V_{x,y,y_1} = 0$$

hat.

Diese Gleichung der 2ten Ordnung wird aber noch direkter erhalten, und ist bereits durch obige

$$\varphi_{a,b,c} = 0$$

vorgestellt, sobald man die Funktionen μ, ν, ϱ der Gleichungen (4.—6.) beziehlich unter a, b, c repräsentirt sich denkt.

Der Beweis ist ganz analog dem (§. 270. XVI.) gegebenen.

Beispiel. Will man eine Differenzialgleichung der 2ten Ordnung suchen, welche den singulären Werth

1) $$\partial y = Ay$$

hat; so nehme man die beliebige Ur-Gleichung

2) $y-\frac{1}{2}ax^2-bx-c=0$,

differenziire solche 2 mal, so daß man erhält

3) $\partial y-ax-b=0$ und 4) $\partial^2 y-a=0$.

Dann findet man aus (2. 3. und 4.)

5) $a=\partial^2 y$, 6) $b=\partial y-x\cdot\partial^2 y$, 7) $c=y-x\cdot\partial y+\frac{1}{2}x^2\cdot\partial^2 y$.

Aus dem gegebenen singulären Werth

1) $\partial y=Ay$

folgt aber weiter

8) $\partial^2 y=A\cdot\partial y$.

Eliminirt man daher aus den Gleichungen (5. 6. 7. 1. und 8.) die Veränderlichen x, y, ∂y und $\partial^2 y$; so erhält man

9) $a^2+A^2(b^2-2ac)=0=\varphi_{a,b,c}$,

aus welcher Gleichung, wenn man statt a, b, c die Werthe aus (5. 6. und 7.) substituirt, die gesuchte Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

10) $\partial^2 y^2-2A^2\cdot\partial y\cdot\partial^2 y+A^2\cdot\partial y^2=0$

hervorgeht, welche die Gleichung (1.) zum singulären Werth hat, während ihr allgemeines Ur-Integral durch Elimination der Konstante c aus den Gleichungen (2. und 9.) gefunden, und

11) $y-\frac{1}{2}ax^2-bx-\frac{a^2+A^2b^2}{2aA^2}=0$

werden wird.

XVII. Auch läßt sich wieder, wie im (§. 270. XVII.) zeigen, daß jede Gleichung

1) $\varphi_{a,b,c}=0$,

wenn man in ihr die aus einer beliebigen Gleichung

2) $f_{x,y,a,b,c}=0$

und ihren beiden Ableitungsgleichungen

3) $\partial f_{(x)}=0$, 4) $\partial^2 f_{(x)}=0$

gezogenen Werthe (XVI. 4.—6.) μ, ν, ϱ (Funktionen von x, y, y_1 und y_2) beziehlich statt a, b, c setzt, allemal $\partial^3 y=\frac{0}{0}$ werden lassen könne, also im Allgemeinen wirklich einen singulären Werth habe, weil ihre Ableitungsgleichung

5) $\partial\varphi_\mu \cdot \partial\mu_{(x)} + \partial\varphi_\nu \cdot \partial\nu_{(x)} + \partial\varphi_\varrho \cdot \partial\varrho_{(x)} = 0$

allemal und nothwendig einen gemeinschaftlichen Faktor hat, welcher die singulären Werthe liefert *).

Dabei finden sich immer

$$\frac{\partial\mu_{(x)}}{\partial\nu_{(x)}} = \frac{\partial\mu_{y_2}}{\partial\nu_{y_2}}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mu_{(x)}}{\partial\varrho_{(x)}} = \frac{\partial\mu_{y_2}}{\partial\varrho_{y_2}},$$

welche beide Quozienten also von y_3 oder $\partial^3 y$ frei sind. Aus diesem Kennzeichen ersieht man auch, ob zu einer in der Form

$$\varphi_{\mu,\nu,\varrho} = 0$$

gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung eine Gleichung von der Form

$$f_{x,y,a,b,c} = 0$$

gefunden werden könne, so, daß die aus $f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$ und $\partial^2 f_{(x)} = 0$ gezogenen Werthe von a, b, c die gegebenen Funktionen μ, ν, ϱ werden; während dann diese Gleichung $f_{x,y,a,b,c} = 0$ selbst erhalten wird, wenn man die gegebenen Funktionen μ, ν, ϱ beliebigen Konstanten a, b, c gleich setzt, und aus

$$\mu = a, \quad \nu = b, \quad \varrho = c$$

sowohl y_1 als auch y_2 eliminirt.

---

*) Es ist nämlich nothwendig jede der 3 Gleichungen

$$\partial\mu_{(x)} = 0, \quad \partial\nu_{(x)} = 0, \quad \partial\varrho_{(x)} = 0$$

eine und dieselbe Gleichung der 3ten Ordnung

$$\partial^3 y + M_{x,y,y_1,y_2} = 0.$$

Also haben die Ableitungen $\partial\mu_{(x)}$, $\partial\nu_{(x)}$, $\partial\varrho_{(x)}$ den Faktor $\partial^3 y + M$ mit einander gemein, und außerdem noch einen 2ten Faktor, welcher im Allgemeinen für jede derselben verschieden und von y höchstens die 2te Ordnung der Ableitungen enthalten wird. Daher hat dann auch die obige Gleichung (5.) diesen Faktor $\partial^3 y + M = 0$, welcher die eigentliche Gleichung der dritten Ordnung ist, außerdem aber noch einen Faktor, höchstens von der 2ten Ordnung, welcher also, wenn er den übrigen Bedingungen genügt, der singuläre Werth seyn wird.

XVIII. Es bleibt uns nun noch übrig von den doppelten singulären Werthen einer gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung zu sprechen. Da nämlich der singuläre Werth einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung

1) $$F_{x,y,y_1,y_2} = 0$$

in der Regel eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung

2) $$V_{x,y,y_1} = 0$$

ist; so hat letztere nicht bloß ein allgemeines Integral mit einer willkührlichen Konstante c, nämlich

3) $$\psi_{x,y,c} = 0,$$

sondern vielleicht auch selber wieder einen singulären Werth

4) $$W_{x,y} = 0,$$

welcher nun der doppelte singuläre Werth von $F = 0$ genannt wird.

Es wird aber dieser doppelte singuläre Werth aus dem allgemeinen Ur-Integral

5) $$f_{x,y,a,b} = 0$$

der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung dadurch gefunden, daß man aus

6) $\partial f_a = 0$ und 7) $\partial f_b = 0$

und aus der Gleichung (5.) die beiden Konstanten a und b elimirt, wenn man nur die Form von $f_{x,y,a,b}$ so gewählt hat, daß die Gleichungen (5. und 6.) keinen Widerspruch enthalten, sondern die Elimination möglich ist.

Die Gleichung der 2ten Ordnung

) $$y - x\cdot\partial y + \tfrac{1}{2}x^2\cdot\partial^2 y - (\partial y - x\cdot\partial^2 y)^2 - \partial^2 y^2 = 0 = F$$

hat zum singulären Werth

2′) $$y(1+x^2) + \tfrac{1}{16}x^4 - (\tfrac{1}{2}x^3 + x)\cdot\partial y - \partial y^2 = 0 = V,$$

welche letztere das allgemeine Integral

3′) $$\sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\cdot\sqrt{1+x^2} - log.(\sqrt{1+x^2} - x) + C = 0 = \psi$$

und wiederum den singulären Werth

4′) $$16y+4x^2+x^4 = 0 = W$$

hat. Dieser letztere doppelte singuläre Werth, wird nun aber auch erhalten, wenn man aus dem allgemeinen Ur-Integral der (1′), nämlich aus

5′) $$y-\tfrac{1}{2}ax^2-bx-a^2-b^2 = 0 = f$$

und deren beide Ableitungen nach a und nach b, nämlich aus

6′) $$-\tfrac{1}{2}x^2-2a = 0 = \partial f_a$$

und

7′) $$-x-2b-0 = \partial f_b$$

sowohl a als auch b eliminirt.

Der Grund davon ist dieser: Nach (VII.) erhält man den singulären Werth $V=0$ von $F=0$, wenn man aus dem allgemeinen Ur-Integral

5) $$f_{x,y,a,b} = 0,$$

aus dessen Differenzial

8) $\partial f_{(x)}=0$ oder $\partial f_x+\partial f_y\cdot\partial y=0$ oder $f'_{x,y,a,b}=0$

und noch aus der Gleichung

9) $$\partial f_a\cdot\partial f'_b-\partial f_b\cdot\partial f'_a = 0,$$

sowohl a als auch b eliminirt. Man kann also bereits die Gleichung (5.) als den singulären Werth ansehen, sobald man nnr unter a und b die aus (8. und 9.) für a und b zu ziehenden Werthe

10) $a = a_{x,y,y_1}$ und 11) $b = b_{x,y,y_1}$

gesetzt denkt. Differenziirt man daher, um von diesem singulären Werth abermals den singulären Werth nach (II.) zu erhalten, diesen erstern Werth (5.), so daß man die Gleichung der 2ten Ordnung

12) $$\partial f_x+\partial f_y\cdot\partial y+\partial f_a\partial a_{(x)}+\partial f_b\cdot\partial b_{(x)} = 0$$

d. h. wegen (8.), diese andere

13) $$\partial f_a\cdot\partial a_{(x)}+\partial f_b\cdot\partial b_{(x)} = 0$$

erhält, wobei aus (10. u. 11.)

14) $$\partial a_{(x)} = \partial a_x+\partial a_y\cdot\partial y+\partial a_{y_1}\cdot\partial^2 y$$

und

15) $$\partial b_{(x)} = \partial b_x+\partial b_y\cdot\partial y+\partial b_{y_1}\cdot\partial^2 y$$

ist; so wird offenbar $\partial^2 y$ aus (13.) die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, wenn

6) $\partial f_a = 0$ und 7) $\partial f_b = 0$

genommen wird. Und da diese aus (6. und 7.) für a und b zu ziehenden Werthe (in x und y), und der dafür aus (5.) zu ziehende Werth von y (in x), den Gleichungen (8. und 9.) zu gleicher Zeit genügen; so werden durch diese Werthe von a, b und y, die Gleichungen (10. u. 11.) identisch. Demnach ist der mit (5.) und (6. u. 7.) durch Elimination der Konstanten a und b zu ziehende Werth von y (in x) derjenige, welcher das aus $V = 0$ gezogene $\partial^2 y$ auf die Form $\frac{0}{0}$ bringt, demnach im Allgemeinen ein singulärer Werth von $V = 0$, während $V = 0$ selber der singuläre Werth von $F = 0$ gewesen ist.

XIX. Der doppelte singuläre Werth einer gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung $F = 0$ genügt im Allgemeinen dieser letzten Gleichung selbst nicht D. h. wenn man aus ihm y, dann durch Ableiten auch noch ∂y und $\partial^2 y$ alle in x ausgedrückt findet, und diese Werthe statt y, ∂y, $\partial^2 y$ in $F = 0$ substituirt; so wird diese Gleichung in der Regel nicht identisch werden.

Denn da $f_{x,y,a,b} = 0$ das allgemeine Integral ist, so genügten die aus $f = 0$ und

$$\partial f_{(x)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y = 0 \quad \text{oder} \quad f'_{x,y,y_1,a,b} = 0,$$

so wie noch aus

$$\partial f'_{(x)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial f'_x + \partial f'_y \cdot \partial y + \partial f'_{y_1} \cdot \partial^2 y = 0$$

hervorgehenden Werthe von y, ∂y, $\partial^2 y$ (in x, a, b) offenbar der Gleichung $F = 0$. Sind nun a nnd b als diejenigen Funktionen von x und y gedacht, welche $\partial f_a = 0$ und $\partial f_b = 0$ machen, so bleibt unter dieser Voraussetzung die Gleichung $\partial f_{(x)} = 0$ der Form nach dieselbe, wie vorher: aber die Gleichung $\partial f'_{(x)} = 0$ bekommt jetzt noch die Glieder

$$\partial f'_a \cdot \partial a_{(x)} + \partial f'_b \cdot \partial b_{(x)}$$

hinzu, und da der nun für $\partial^2 y$ hervorgehende Werth auch der Form nach ganz anders wird als vorher, so werden die jetzt aus den 3 Glei-

chungen hervorgehenden Werthe von y, ∂y und $\partial^2 y$ im Allgemeinen der Gleichung $F = 0$ nicht mehr genügen.

XX. Daß endlich der doppelte singuläre Werth unmittelbar aus $F = 0$ und ohne ein Integral zu Hülfe nehmen zu müssen, gefunden werden kann, fällt in die Augen, da man aus $\partial F_{(x)} = 0$, $\partial^3 y = \pi_3$ finden, solches $\pi_3 = \frac{0}{0}$ setzen, und so den erstern singulären Werth $V = 0$ erhalten kann. Aus diesem kann dann $\partial V_{(x)} = 0$, daraus $\partial^2 y = 0$ gefunden, dieses letztere $= \frac{0}{0}$ gesetzt, und so wiederum der singuläre Werth von $V = 0$ gefunden werden, welcher letztere gerade derjenige ist, welcher der doppelte singuläre Werth von $F = 0$ genannt wird.

C. α) Von den Integralien einer Differenzialgleichung der nten Ordnung.

§. 276. Aufgabe.

Eine Differenzialgleichung der nten Ordnung

$$F_{x, y, y_1, y_2, \cdots y_n} = 0.$$

zu integriren, unter der Voraussetzung daß y_a die Ableitung $\partial^a y_x$ vorstellt, für jede ganze Zahl, welche statt a gesetzt werden mag.

Auflösung. Man setze $x - \alpha = \varkappa$, und substituire in F

$x'_\varkappa$ oder $x + \varkappa$ d. h. $\delta^0 x + \delta x \cdot \varkappa + \delta^2 x \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$ statt x,

$y_\varkappa$ oder $\delta^0 y + \delta y \cdot \varkappa + \delta^2 y \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$ statt y,

$(y_a)_\varkappa$ oder $\delta^0 y_a + \delta y_a \cdot \varkappa + \delta^2 y_a \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$ statt y_a,

so daß dadurch

$$F \text{ in } F_\varkappa \text{ oder } \delta^0 F + \delta F \cdot \varkappa + \delta^2 F \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

übergeht; man entwickle nachgehends (nach §. 243.) die Koeffizien-

ten $\delta^0 F$, δF, $\delta^2 F$, $\delta^3 F$ ꝛc. ꝛc.; setze in diesen Entwickelungen statt $\delta^b y_a$ das gleichbedeutende $\vartheta^a(\delta^b y)_x$, (für jedes a und für jedes b), so wie statt

$x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$ beziehlich $\alpha, C, C_1, C_2, \cdots C_{n-1}$:

so geben die Gleichungen

$$\delta^0 F = 0, \quad \delta^1 F = 0, \quad \delta^2 F = 0, \quad \delta^3 F = 0, \text{ ꝛc.}$$

dann nothwendig die Koeffizienten $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, ꝛc. der obigen Reihe y_x, (in α und noch n willkührlichen Konstanten $C, C_1, C_2, \cdots C_{n-1}$ ausgedrückt), so daß diese Reihe

$$y_x \text{ oder } \delta^0 + \delta y \cdot x + \delta^2 y \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

alle Funktionen y von x in sich begreift, welche $F=0$ identisch machen, mit Ausnahme derer, welche die Gleichungen $F=0$ oder $\delta F=0$, oder $\delta^2 F=0$, ꝛc. identisch machen, oder auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, wo dann diese Gleichungen nicht mehr zur Bestimmung der gesuchten Koeffizienten gebraucht werden können, welche letztere dann vielleicht nicht einmal in obiger Gleichung $y=y_x$ enthalten sind. (Vergl. §§. 205. 271.).

§. 277. Zusatz.

Man erhält aber genau dasselbe Resultat, wenn man aus

$$F=0, \quad \vartheta F_{(x)}=0, \quad \vartheta^2 F_{(x)}=0, \quad \vartheta^3 F_{(x)}=0, \text{ ꝛc.}$$

die Ableitungen $\vartheta^n y_x$, $\vartheta^{n+1} y_x$, $\vartheta^{n+1} y_x, \cdots$

alle als Funktionen π_n, π_{n+1}, $\pi_{n+3}, \cdots$

von $x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$ herstellt; dann die Formel des Allgemeinen Maclaurinschen Lehrsatzes

$$y = [y] + [\vartheta y_x] \cdot \frac{x-\alpha}{1} + [\vartheta^2 y_x] \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$$

$$+ [\vartheta^n y_x] \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!} + [\vartheta^{n+1} y_x] \cdot \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$$

nimmt, in selbiger statt $\vartheta^n y_x$, $\vartheta^{n+1} y_x$, ꝛc. die eben gefundenen

Funktionen π_n, π_{n+1}, ꝛc. ſubſtituirt, zuletzt aber in den in eckigen Klammern eingeſchloſſenen Koeffizienten α ſtatt x, ſo wie C, C_1, $C_2, \cdots C_{n-1}$ beziehlich ſtatt y, y_1, $y_2, \cdots y_{n-1}$ ſchreibt. (Vgl. §§. 266. 272.).

§. 278. Zuſatz.

Es läßt ſich wieder genau wie in den (§§. 267. 273.) zeigen, daß das in den (§§. 276. u. 277.) gefundene allgemeine Ur-Integral von $F = 0$, genau n willkührliche Konſtanten in ſich aufnimmt, nicht mehr und nicht weniger (obgleich ſcheinbar mehr als n willkührliche Konſtanten vorkommen können, ſo daß dieſes allgemeine Ur-Integral von

$$F_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_n} = 0,$$

durch $f_{x,y,a_1,a_2,a_3,\cdots a_n} = 0$, oder $y = \varphi_{x,a_1a_2,a_3,\cdots a_n}$

vorgeſtellt werden kann, wo a_1, a_2, $a_3, \cdots a_n$ die n willkührlichen (der $F = 0$ fremden) Konſtanten vorſtellen.

Beiſpiel. Als Beiſpiel nehme man die Differenzial-Gleichung der nten Ordnung

$$y - x\cdot\partial y + \tfrac{1}{2}x^2\cdot\partial^2 y - \frac{1}{3!}x^3\cdot\partial^3 y + \cdots + (-1)^n\cdot\frac{1}{n!}x^n\cdot\partial^n y + \psi_{y_n} = 0,$$

wo ψ_{y_n} eine ganz beliebige Funktion von y_n oder $\partial^n y$ vorſtellen ſoll. Differenziirt man dieſe Gleichung, um nach (§. 277.) zu verfahren, ſo erhält man

$$\left((-1)^n\cdot\frac{1}{n!}x^n + \partial\psi_{y_n}\right)\cdot\partial^{n+1}y = 0$$

alſo $\partial^{n+1}y = 0$, $\partial^{n+2}y = 0$, ꝛc. ꝛc.;

ſo daß die Formel des (§. 277.)

$$y = C_1 + C_2\cdot x + C_3\cdot\frac{x^2}{2!} + C_4\cdot\frac{x^3}{3!} + \cdots C_{n+1}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

als allgemeines Ur-Integral liefert, während die Conſtanten C_1 und C_n durch die Gleichung

$$C_1 + \psi C_n = 0$$

von einander abhängen *).

---

*) Da dieſe Gleichung der (n+1)ten Ordnung auch identiſch wird, wenn man dem andern Faktor der nten Ordnung

§. 279. Zusatz.

An die Betrachtung dieses allgemeinen Ur-Integrals $f = 0$ mit n willkührlichen Konstanten, knüpft sich aber leicht noch folgendes an:

I. Zieht man aus der allgemeinen Ur-Integralgleichung $y = \varphi_x$ oder $f = 0$, noch

$$\partial f_{(x)} = 0, \quad \partial^2 f_{(x)} = 0, \quad \partial^3 f_{(x)} = 0, \ldots, \quad \partial^n f_{(x)} = 0;$$

so hat man n+1 Gleichungen, aus denen, wenn die n Konstanten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ eliminirt werden, die gegebene Differenzialgleichung $F = 0$ nothwendig hervorgeht.

II. Eliminirt man aus den 2 ersten dieser Gleichungen, nämlich aus $f = 0$ u. $\partial f_{(x)} = 0$ nach und nach jede der n Konstanten, so erhält man n Differenzialgleichungen der 1sten Ordnung, welche als eben so viele allgemeine (n—1)ten Integrale (mit n—1 willkührlichen Konstanten) der gegebenen Differenzialgleichung $F_{x,y,y',y_2,\ldots y_n} = 0$ angesehen werden müssen, weil jede, wenn man sie noch n—1 mal hinter einander nach allem x differenziirt, und aus diesen n Gleichungen die (n—1) Konstanten eliminirt, zu der Gleichung $F = 0$ zurückführen muß. —

Und eliminirt man aus je zweien dieser allgemeinen (n—1)ten Integrale das Zeichen ∂y, so erhält man allemal die Ur-Integralgleichung mit allen n Konstanten wieder.

III. Eliminirt man aber aus den 3 ersten der Gleichungen in (I.), nämlich aus

$$f = 0, \quad \partial f_{(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \partial^2 f_{(x)} = 0,$$

je zwei von den n willkührlichen Konstanten; so erhält man

$$(-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \partial\psi_{y_n} = 0$$

genügt; so wird der gegebenen Differenzialgleichung der nten Ordnung auch ein singulärer Werth zukommen, insofern er $\partial^{n+1} y = \frac{0}{0}$ macht, wenn solcher auch zuweilen selber ein besonderes Integral seyn kann. (Vgl. den später folgenden §. 280.).

$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ neue Gleichungen, lauter Differenzialgleichungen der 2ten Ordnung, jede mit $n-2$ der willkührlichen Konstanten, welche alle als eben so viele allgemeine $(n-2)$ten Integrale von $F=0$ angesehen werden müssen, weil jede derselben allemal zu $F=0$ zurückführt, wenn man sie $(n-2)$ mal hintereinander nach allem x differenziirt, und aus den $n-1$ Gleichungen die $n-2$ willkührlichen Konstanten eliminirt. — Und je 3 dieser allgemeinen $(n-2)$ten Integrale liefern nothwendig wiederum die allgemeine Ur-Integralgleichung $f=0$, so bald aus ihnen die Zeichen ∂y und $\partial^2 y$ eliminirt werden.

IV. Eliminirt man aus den $\nu+1$ ersten Gleichungen in (I.), nämlich aus

$$f=0,\quad \partial f_{(x)}=0,\quad \partial^2 f_{(x)}=0,\ \text{ꝛc.},\quad \partial^{\nu} f_{(x)}=0,$$

je ν von den n willkührlichen Konstanten $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$; so erhält man $\frac{n^{\nu}|-1}{\nu!}$ oder n_{ν} (d. h. auch $n_{n-\nu}$)*)

neue Gleichungen, Differenzialgleichungen der νten Ordnung, welche als eben so viele allgemeine $(n-\nu)$te Integralgleichungen (mit $n-\nu$ willkührlicheu Konstanten) von $F=0$ angesehen werden müssen. — Und eliminirt man aus je $\nu+1$ derselben, die Zeichen ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y, \cdots \partial^{\nu} y$, so wird man jedesmal zur Ur-Integralgleichung $f=0$ mit den n willkührlichen Konstanten zurückgeführt.

V. Eliminirt man also auch aus den n ersten Gleichungen in (I.), nämlich aus

$$f=0,\quad \partial f_{(x)}=0,\quad \partial^2 f_{(x)}\ \text{ꝛc.},\quad \partial f^{n-1} f_{(x)}=0,$$

je $n-1$ der willkührlichen Konstanten $(a_1, a_2, a_3, \cdots a_n)$; so erhält man $\frac{n^{n-1}|-1}{(n-1)!}$ d. h. n_{n-1}, d. h. n_1, also n neue Gleichungen, lauter Differenzialgleichungen der $n-1$ten Ordnung, welche aber alle als so viele allgemeine erste Integrale von

*) Vergl. (II. Th. d. S. §§. 367. 350. 351.).

$F = 0$ angesehen werden müssen, jedes mit einer andern willkührlichen Konstante. — Und eliminirt man aus diesen n Gleichungen die n—1 Zeichen ∂y, $\partial^2 y, \cdots, \partial^{n-1} y$, so wird man abermals zur allgemeinen Ur-Integralgleichung $f = 0$ zurückgeführt.

VI. Setzt man aber in der Ur-Integralgleichung $f = 0$, statt der willkührlichen Konstanten $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ beliebige, aber bestimmte Funktionen von neuen willkührlichen Konstanten $b_1, b_2, b_3, \cdots b_n$; so erhält man $y = \chi_x$ oder $\psi_{x,y} = 0$ als neue Ur-Integralgleichung, welche wiederum n willkührliche Konstanten enthält, welche jedoch, wie man gesehen hat, in der ersten Ur-Integralgleichung $f = 0$ enthalten ist. — Würden nun aus $\psi = 0$ die (n—1)ten, (n—2)ten, (n—3)ten, ··· (n—ν)ten, ··· ersten Integralgleichungen gebildet, jede mit der ihr zukommenden Zahl der Konstanten $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$; so kann man nur insofern sagen, daß diese jetzigen Gleichungen in den (II—V.) entwickelten eben so vielten Integralen stecken, oder jene in diesen, als man von der in (II—V.) bestimmten Zahl der verschiedenen 1sten, 2ten, 3ten, ··· (n—ν)ten, ··· (n—1)ten Integralgleichungen zur Ur-Integralgleichung, dann zu jeder andern Ur-Integralgleichung, jedesmal mit neuen n willkührlichen Konstanten, endlich von jeder der letztern wieder zu den neuen verschiedenen (n—1)ten, (n—2)ten, ꝛc., (n—ν)ten, ··· 1sten Integralgleichungen gelangen kann.

VII. Namentlich erhält man alle ersten Integralgleichungen von $F = 0$ (welche Differenzialgleichungen der n—1ten Ordnung sind), wenn man die zuerst erhaltenen n allgemeinen ersten Integrale, deren jedes eine andere der n Konstanten $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ hat, nach dieser Konstante auflöst, so daß

$$a_1 = (u_1)_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}}$$

$$a_2 = (u_2)_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}}$$

u. s. w. f. wird, zuletzt aber eine beliebige Funktion Z aller oder einiger oder einer dieser Funktionen $u_1, u_2, \cdots u_n$ einer willkührlichen Konstante C gleich setzt. (Vgl. §. 269. III. §. 274. VIII.).

VIII. Hat man sich von der gegebenen Differenzialgleichung der nten Ordnung

$$F_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_n} = 0$$

zu einer Anzahl ν allgemeiner erster Integralgleichungen erhoben, von denen jede eine andere der ν willkührlichen Konstanten c_1, c_2, c_3, $\cdots$, c_ν enthält; so kann man, wenn $\nu \leqq n$ ist, aus ihnen die Zeichen $\partial^n y$, $\partial^{n-1} y$, $\partial^{n-2} y$, $\cdots$, $\partial^{n-(\nu-1)} y$ elimiiniren, und man erhält eine Gleichung mit ν willkührlichen Konstanten, welches eine Differenzialgleichung der $(n-\nu)$ten Ordnung seyn wird, aber als allgemeine νte Integralgleichung von $F = 0$ mit ν willkührlichen Konstanten angesehen werden muß.

Ist aber $\nu = n$, so ist sie die allgemeine Ur-Integralgleichung mit allen n willkührlichen Konstanten c_1, c_2, c_3, $\cdots$, c_n*).

IX. Hat man aus der Gleichung $F = 0$, eine Anzahl $\mu+1$ von allgemeinen νten Integralen, jede mit ν willkührlichen Konstanten, von denen keine aus der andern hervorgeht, und welche Differenzialgleichungen der $n-\nu$ten Ordnung sind, gefunden; und eliminirt man aus diesen $\mu+1$ Gleichungen die μ Zeichen

$$\partial^{n-\nu} y, \quad \partial^{n-\nu-1} y, \quad \partial^{n-\nu-2} y, \cdots \partial^{n-\nu-(\mu-1)} y:$$

---

*) Diese n ersten Integrale von $F = 0$ verschafft man sich gewöhnlich dadurch, daß man aus dem Taylorschen Lehrsatze

$$f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

$-x$ statt h setzend, die Bernoullische Reihe

$$f_0 = f_x - \partial f_x \cdot x + \partial^2 f_x \cdot \frac{x^2}{2!} - \partial^3 f_x \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

findet, in solcher aber unter f nach und nach die n verschiedenen Funktion von x, nämlich y, ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, $\cdots$, $\partial^{n-1} y$ versteht, wo dann jede dieser hervorgehenden n Gleichungen von der $(n-1)$ten Ordnung ist, jede aber eine andere willkührliche Konstante, welche statt $[y]_0$, $[\partial y]_0$, $[\partial^2 y]_0$, $\cdots$ $[\partial^{n-1} y]_0$ gesetzt worden, enthält.

Und noch besser ist es, auch zu diesem Zwecke, wenn man statt der gemeinen Bernoullischen Reihe, die **verallgemeinerte** nimmt. (§. 164. d. IV. Th. d. S.).

so erhält man eine Differenzialgleichung der $n-(\mu+\nu)$ten Ordnung; welche als allgemeines $(\mu+\nu)$tes Integral von $F=0$ angesehen werden kann und muß.

Allein hier muß man nicht übersehen, daß ein solches allgemeines $\mu+\nu$tes Integral nicht mehr als $\mu+\nu$ willkührliche Konstanten in sich aufnehmen darf, (weil, wenn solches $\mu+\nu$ mal hintereinander nach allem x differenziirt wird, man $\mu+\nu+1$ Gleichungen erhält, aus denen $F=0$ hervorgehen muß, wenn man $\mu+\nu$ der willkührlichen Konstanten eliminirt). Sollte daher die obige Gleichung der $n-(\mu+\nu)$ten Ordnung mehr als $\mu+\nu$ Konstanten in sich aufgenommen haben; so würden diese Konstanten nicht alle willkührlich seyn, sondern es würden die übrigen als Zusammensetzungen (Funktionen) von $\mu+\nu$ derselben angesehen werden müssen. Die Gleichungen zwischen diesen Konstanten (wodurch einige derselben als Funktionen der $\mu+\nu$ übrigen gegeben seyn müssen) finden sich aber allemal, wenn man bedenkt, daß diese Integralgleichung der $n-(\mu+\nu)$ten Ordnung nicht bloß der Gleichung $F=0$, sondern auch den $\mu+1$ allgemeinen νten Integralen, und zugleich auch allen aus ihnen durch fortgesetztes Differenziiren erhaltenen Differenzialgleichungen der höhern Ordnungen zu genügen habe.

Und ist $\mu+\nu=n$, so hat man zu gleicher Zeit die allgemeine Ur-Integralgleichung, welche jedoch ebenfalls überzählige Konstanten haben kann, so daß die übrigen alle durch n derselben ausdrückbar, und diese Ausdrücke selbst, der eben gegebenen Andeutung zufolge, gefunden werden müssen.

X. Aus den bisherigen Betrachtungen geht endlich noch hervor,

daß das allgemeine Ur-Integral mit den n willkührlichen Konstanten, welches einer gegebenen Differenzialgleichung der nten Ordnung $F=0$ zukommt, allemal gefunden wird,

1) wenn man n allgemeine erste, oder
2) wenn man $n-1$ allgemeine zweite, oder
3) wenn man $n-2$ allgemeine dritte, oder allgemein
4) wenn man $n-(\nu-1)$ allgemeine νte, also auch

5) wenn man zwei allgemeine (n—1)te Integrale hat, und aus ihnen die jedesmal noch vorkommenden Ableitungen ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$ ꝛc. eliminirt.

Es wäre daher passend, obgleich nicht sehr gebräuchlich, zu sagen, daß die Gleichung $F = 0$ der nten Ordnung $n-(\nu-1)$ allgemeine νte Integrale habe, weil man von diesen gerade zum allgemeinen Ur-Integral, von diesem wiederum zu jedem andern allgemeinen Ur-Integral, und von dem letztern wieder zu den unendlich vielen niedern Integralen, und namentlich auch zu den unendlich vielen νten Integralen von $F = 0$ gelangen kann. Hierzu mag nun noch das nachstehende Beispiel die Erläuterungen geben.

Beispiel. Geht man von der Differenzialgleichung der 4ten Ordnung

$$1) \qquad \partial^4 y = 0$$

aus, so gelangt man zu dem allgemeinen Ur-Integral

$$2) \qquad y = a + bx + cx^2 + mx^3,$$

welches differenziirt nach und nach

$$3) \qquad \partial y = b + 2cx + 3mx^2,$$

$$4) \qquad \partial^2 y = 2c + 6mx,$$

$$5) \qquad \partial^3 y = 6m$$

liefert. Eliminirt man nun aus (2 und 3.) nach und nach jede der 4 Konstanten a, b, c m, so erhält man die 4 allgemeinen dritten Integralgleichungen ier (1.), nämlich:

$$6) \begin{cases} \partial y = b + 2cx + 3mx^2, \\ y = a + x \cdot \partial y - cx^2 - 2mx^3, \\ x \cdot \partial y = 2y - 2a - bx + mx^3, \\ x \cdot \partial y = 3y - 3a - 2bx - cx^2. \end{cases}$$

Jede Funktion y_x von x, welche statt y gesetzt irgend einer dieser 4 Gleichungen (6.) genügt, muß auch der Gleichung (1.) genügen. Eliminirt man aus je zweien dieser 4 Gleichungen das Zeichen ∂y; so muß allemal die (2) wieder hervorgehen, so daß also 2 dieser 4 allgemeinen dritten Integrale ausreichen, um das allgemeine Ur-Integral zu geben.

Eliminirt man aus (2. 3. u. 4.) je zwei der 4 Konstanten a, b, c, m; so ergeben sich die 6 allgemeinen zweiten Integrale nämlich:

$$7)\quad \begin{cases} \partial^2 y = 2c + 6mx, \\ \partial y = x\cdot\partial^2 y + b - 3mx^2, \\ 2\partial y = x\cdot\partial^2 y + 2b + 2cx, \\ y = a + x\cdot\partial y - \frac{1}{2}x^2\cdot\partial^2 y + mx^3, \\ y = a + x\cdot\partial y - \frac{1}{3}x^2\cdot\partial^2 y - \frac{1}{3}cx^2, \\ y = a + \frac{1}{3}bx - \frac{1}{6}x^2\cdot\partial^2 y + \frac{2}{3}x\cdot\partial y, \end{cases}$$

von welchen jedoch irgend 3 ausreichen, um durch Elimination von ∂y und $\partial^2 y$ zu der Ur-Integralgleichung (2) mit den 4 willkührlichen Konstanten zu gelangen.

Eliminirt man endlich aus den Gleichungen (2—5.) je 3 der 4 Konstanten a, b, c, m; so erhält man die 4 ersten Integrale von (1.), nämlich

$$8)\quad \begin{cases} \partial^3 y = 6m, \\ \partial^2 y = 2c + x\cdot\partial^3 y, \\ \partial y = b + x\cdot\partial^2 y - \frac{1}{2}x^2\cdot\partial^3 y, \\ y = a + x\cdot\partial y - \frac{1}{2}x^2\cdot\partial^2 y + \frac{1}{6}x^3\cdot\partial^3 y, \end{cases}$$

welche jedoch alle 4 erfordert werden, um durch Elimination von ∂y, $\partial^2 y$ und $\partial^3 y$ sich sogleich zur Ur-Integralgleichung (2.) erhoben zu sehen.

Und weil man aus dem Ur-Integral (2.) dadurch, daß man statt a, b, c, m Funktionen von 4 neuen willkührlichen Konstanten p, q, r, s setzt, abermals ein Ur-Integral mit 4 willkührlichen Konstanten erhält, welches jenes (so wie jenes dieses) in sich schließt, und aus dem letzteren durch Elimination der Konstanten p, q, r, s abermals 4 dritte, 6 zweite und 4 erste Integrale von (1.) abgeleitet werden können; so folgt, in Betracht, daß diese neuen Ur-Integrale sich beliebig vervielfältigen lassen:

1) daß die Differenzialgleichung der 4ten Ordnung nicht 4 sondern unendlich viele allgemeine dritte Integrale hat (welche bloß ∂y, aber nicht mehr $\partial^2 y$, $\partial^3 y$ enthalten) mit 3 willkührlichen Konstanten, von welchen Gleichungen noch überdies nur zwei nöthig sind, um durch Elimination von ∂y zur Ur-Integralgleichung mit den 4 willkührlichen Konstanten sich erhoben zu sehen;
2) daß dieselbe Differenzialgleichung der 4ten Ordnung nicht 6, sondern unendlich viele zweite Integrale hat (welche ∂y und $\partial^2 y$, aber nicht mehr $\partial^3 y$ enthalten) mit zwei willkührlichen Konstanten, von welchen Gleichungen noch überdies nur drei nöthig sind, um durch Elimination von ∂y und $\partial^2 y$ sich sogleich zum allgemeinen Ur-Integral erhoben zu sehen;
3) daß dieselbe Differenzialgleichung der 4ten Ordnung nicht 4, son-

dern unendlich viele erste Integrale mit einer willkührlichen Konstante hat, von denen jedoch 4 erforderlich sind, wenn man aus ihnen durch Elimination von ∂y, $\partial^2 y$ und $\partial^3 y$ sogleich zum allgemeinen Ur-Integral kommen will.

Und wollte man in dem allgemeinen Ur-Integral (2) statt a, b, c, m, Funktionen von 4 neuen willkührlichen Konstanten p, q, r, s setzen, und aus diesem neuen Ur-Integral mit den 4 willkührlichen Konstanten p, q, r, s, 4 dritte Integrale (welche nur noch ∂y, aber nicht mehr $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, dagegen allemal 3 der 4 willkührlichen Konstanten p, q, r, s, enthalten) ableiten; und wollte man endlich eines der 4 dritten Integrale in (7.) mit einem der jetzigen 4 dritten Integrale durch Elimination von ∂y verbinden: so würde man sich allemal zum Ur-Integral, aber mit 6 willkührlichen Konstanten (etwa a, b, c und p, r, s) zurückgeführt sehen, von welchen 6 Konstanten jedoch zwei als Funktionen der 4 übrigen angesehen werden müssen, und durch zwei Gleichungen zwischen a, b, c, p, r, s bestimmt sind. Diese Gleichungen endlich findet man, wenn man bedenkt, daß die hier zuletzt für y gefundene Funktion in x, a, b, c, p, r, s der gegebenen Differenzialgleichung (1.) und auch jeder ersten Integralgleichung dergestalt zu genügen habe, daß, wenn man sie statt y in letztere Gleichungen substituirt, solche identisch werden, also vor allen Dingen die x aus ihnen herausfallen müssen, die erhaltenen Gleichungen mithin bloß Gleichungen zwischen den verschiedenen Konstanten seyn können; so daß man sich ihrer bedienen kann, um einige Konstanten durch die übrigen auszudrücken, und dadurch die Gleichungen selbst in rein identische zu verwandeln.

§. 280. Zusatz.

C. β) Von den singulären Werthen der Differenzialgleichungen der nten Ordnung.

Betrachten wir schließlich noch die singulären Werthe, welche einer Differenzialgleichung der nten Ordnung zukommen können. — Damit sie nicht in dem allgemeinen Integral der (§. 276. oder §. 277.) enthalten sind, müssen sie die aus $F_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_n} = 0$ und ihren Ableitungen für $\partial^n y$, $\partial^{n+1} y$, $\partial^{n+2} y$, ꝛc. zu findenden Ausdrücke π_n, π_{n+1}, π_{n+2}, ꝛc., welche Funktionen von $x, y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$ seyn werden, alle oder doch einen einzigen derselben auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen.

I. Die erste Art der singulären Werthe von $F = 0$ wird also gefunden, wenn π_n die Form $\frac{G}{H}$ hat, und man nun Werthe für y (in x) sucht, welche den beiden Gleichungen

$$G = 0 \quad \text{und} \quad H = 0$$

zu gleicher Zeit genügen, ohne in dem allgemeinen Ur-Integral von $F = 0$ enthalten zu seyn. (Vgl. §. 270. I. und §. 275. I.).

II. Die zweite Art der singulären Werthe von $F = 0$ findet man dagegen, wenn man aus $F = 0$ und $\partial F_{(x)} = 0$ zuerst $\partial^{n+1} y = \pi_{n+1}$ findet, nun, wenn letzteres von der Form $\frac{G}{H}$ wird, die Werthe von y (in x) aufsucht, welche allen 3 Gleichungen

$$G = 0, \quad H = 0 \quad \text{und} \quad F = 0$$

zu gleicher Zeit genügen, ohne in dem allgemeinen Ur-Integral von $F = 0$ enthalten zu seyn *). (Vgl. §. 270. II. u. §. 275. II.).

III. Diese singulären Werthe der (I. und II.) werden im Allgemeinen durch Differenzialgleichungen der $n-1$ Ordnung ausgedrückt seyn, so daß jeder dann durch eine allgemeine Ur-Integralgleichung mit $n-1$ willkührlichen Konstanten c_1, c_2, $c_3, \ldots c_{n-1}$ ausgedrückt werden kann.

Diese singulären Werthe alle gehen aber auch aus dem allgemeinen Ur-Integral mit seinen n willkührlichen Konstanten, aus jedem allgemeinen νten Integral mit seinen ν willkührlichen Konstanten, und natürlich dann auch aus jedem allgemeinen ersten Integral mit seiner willkührlichen Konstante dadurch hervor, daß man sich statt der Konstanten schickliche Funktionen von x gesetzt denkt. (Vgl. §. 270. III. und §. 275. III.).

---

*) Aus später (in XIV.) folgenden Gründen hat man nur den Gleichungen $G = 0$ und $H = 0$ zu genügen, und man kann dann überzeugt seyn, ohne Probe, daß dann auch der $F = 0$ genügt ist.

IV. Ist ein der $F=0$ genügender Werth von y bereits als eine Ur-Gleichung

$$\psi_{x,y,c_1,c_2,\cdots} = 0$$

gegeben, und überdies noch von $F=0$ ein allgemeines erstes Integral

$$\varphi_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1},a} = 0,$$

und soll nun untersucht werden, ob $\psi=0$ ein singulärer Werth oder ein besonderes Integral ist; so finde man nur aus $\psi=0$ zunächst die Ableitungen $\partial\psi_{(x)}=0$, $\partial^2\psi_{(x)}=0, \cdots \partial^{n-1}\psi_{(x)}=0$, daraus dann $y, \partial y, \partial^2 y, \cdots \partial^{n-1} y$ in x und in den Konstanten $c_1, c_2, \cdots$ ausgedrückt, und substituire nachgehends diese Werthe in $\varphi=0$. Wenn dann dem a ein konstanter Werth so gegeben werden kann, daß aus dieser Endgleichung auch noch x von selbst herausfällt, und die Gleichung identisch wird; so ist $\psi=0$ ein besonderes Integral, außerdem aber ein singulärer Werth. (Vgl. §. 275. IV.).

V. Ist aber ein der $F=0$ genügender Werth noch eine Differenzialgleichung der n—1ten Ordnung

$$\psi_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1}} = 0,$$

und außerdem wiederum ein allgemeines erstes Integral von $F=0$, nämlich

$$\varphi_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1},a} = 0$$

gegeben, und soll nun untersucht werden, ob $\psi=0$ ein besonderes Integral oder bloß ein singulärer Werth von $F=0$ ist; so eliminire man aus $\psi=0$ und $\varphi=0$ die Ableitung $\partial^{n-1}y$ d. h. y_{n-1}. Fällt dann $x,y,y_1,\cdots y_{n-2}$ von selbst mit weg, so daß die Gleichung für a einen bestimmten konstanten Werth liefert, oder fallen diese $x,y,y_1,\cdots y_{n-2}$ nicht von selber mit weg, so daß man eine Differenzialgleichung der (n—2)ten Ordnung erhält, welche der Gleichung $F=0$ genügt; so ist $\psi=0$ allemal ein besonderes Integral. Wenn aber keiner dieser beiden Fälle eintritt, ist $\psi=0$ nur ein singulärer Werth. (Vgl. §. 275 V.).

Man sieht zu gleicher Zeit, daß sich diese und ähnliche Lehren hier für Differenzialgleichungen der nten Ordnung leicht noch mehr vervielfältigen und ausdehnen lassen.

VI. Ist ein allgemeines erstes Integral von $F = 0$ nach seiner willkührlichen Konstante a aufgelöst, nämlich auf die Form

$$a = \varphi_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1}}$$

gebracht; so findet man alle singulären Werthe von $F = 0$ aus der Gleichung

$$\frac{1}{\partial \varphi_{y_{n-1}}} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial \varphi_{y_{n-1}} = \frac{1}{0}.$$

Aber nicht nothwendig ist jeder Werth von y in x, welcher dieser Gleichung genügt, auch ein singulärer Werth, weshalb mit jedem dieser Werthe noch die Prüfung angestellt werden muß: 1) ob er $F = 0$ identisch macht, 2) ob er wirklich nicht in dem allgemeinen Ur-Integral von $F = 0$ enthalten ist. (Vgl. 270. IV. und §. 275. VI.).

VII. Aus dem allgemeinen Ur-Integral $f = 0$ mit seinen n willkührlichen Konstanten $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ kann man aber in der Regel die existirenden singulären Werthe von $F = 0$ erhalten, wenn man $f = 0$ n mal hinter einander differenziirt, dabei $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ als Funktionen von x ansieht, aber als solche Funktionen von x, welche in jedem neuen Differenzial den Theil, welcher von dem Differenziiren nach den Konstanten, (jetzt als Funktionen von x gedacht) herrührt, zu Null machen; so daß die Gleichung $f = 0$ und alle ihre Differenzialien der Form nach genau dieselben bleiben, es mögen $a_1, a_2, \cdots a_n$ konstant oder gerade diese Funktionen von x seyn.

Eliminirt man dann aus den n Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser Funktionen $a_1, a_2, \cdots a_n$ von x, auf dem angedeuteten Wege sich ergeben, die n—1 Ableitungen $\partial(a_2)_x$, $\partial(a_3)_x, \cdots \partial(a_n)_x$; so fällt $\partial(a_1)_x$ von selbst mit fort, und man hat diejenige Gleichung, welche mit den n Gleichungen

$$f=0, \quad \partial f_{(x)}=0, \quad \partial^2 f_{(x)}=0, \ldots \partial^{n-1} f_{(x)}=0$$

in Verbindung, wenn man die n Buchstaben $a_1, a_2, \ldots a_n$ eliminirt, diejenige Differenzialgleichung der n—1ten Ordnung geben, die in der Regel ein singulärer Werth von $F=0$ seyn wird. (Vgl. §. 275. VIII.).

Soll aber das Verfahren so seyn, daß man sicher und gewiß ist, keinen der singulären Werthe zu übergehen, sondern sie alle zu bekommen; so wird man auch hier wieder den (§. 275. VII. und §. 270. VI.) näher bezeichneten Weg betreten müssen.

VIII. Sollen aber alle für $F=0$ existirenden singulären Werthe aus einem allgemeinen ersten Integral

$$\varphi_{x,y,y_1,y_2,\ldots y_{n-1},a} = 0$$

gefunden werden, so darf man nur

$$\left.\begin{array}{l} 1) \text{ aus } \varphi = 0 \text{ und } \partial\varphi_a = 0 \\ \text{und } 2) \text{ aus } \varphi = 0 \text{ und } \dfrac{1}{\partial\varphi_{y_{n-1}}} = 0 \end{array}\right\} \text{ a eliminiren.}$$

Jeder der so erhaltenen Werthe muß dann aber auch noch geprüft werden, ob er wirklich allen Bedingungen eines singulären Werthes genügt oder nicht.

α) Ist die Gleichung $\varphi=0$ nach a aufgelöst, so wird man bloß $\dfrac{1}{\partial\varphi_{y_{n-1}}}=0$ nehmen dürfen. (Vgl. VI.).

β) Ist aber die Gleichung $\varphi=0$ nach y_{n-1} aufgelöst, so wird man bloß $\partial\varphi_a=0$ nehmen dürfen. (Vgl. §. 270. VI. und §. 275. IX.).

IX. Der gegebenen Differenzialgleichung $F=0$ kann man immer eine solche Form geben, daß ihr Differenzial $\partial F_{(x)}=0$, welches immer eine Differenzialgleichung von der nächsten (n+1ten) Ordnung ist, sich in zwei Faktoren zerlegen läßt, von welchen der erste nur von der nten Ordnung ist, und mit $F=0$ durch Elimination von $\partial^n y$ alle singulären Werthe giebt, während der

andere Faktor eigentlich erst die Differenzialgleichung der n+1ten Ordnung ist.

Und ist

$$M_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1},a} = 0$$

ein allgemeines erstes Integral von $F=0$; so hat man allemal die eben erwähnte Form von F, wenn man $F=0$ bereits durch $M=0$ vorgestellt seyn läßt, unter a aber die aus $\partial M_{(x)} = 0$ für a zu findende Funktion $\varphi_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_n}$ gesetzt sich denkt, weil dann

$$\partial F_{(x)} = [\partial M_a]_\phi \cdot \partial \varphi_{(x)} = 0$$

wird. (Vgl. §. 275. X.).

X. Daraus folgt aber:

1) Alle singulären Werthe von $F=0$ ergeben sich bereits aus $\partial^{n+1} y = \pi_{n+1} = \frac{0}{0}$.

2) Jeder singuläre Werth von $F=0$ ist allemal ein dem Zähler und Nenner von π_{n+1} gemeinschaftlicher Faktor von der Form $\psi_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1}}$, welcher jedoch nicht gerade von der n—1ten Ordnung seyn muß, sondern noch von einer niedrigern Ordnung (hinsichtlich der Ableitungen von y nach x) seyn kann. (Vgl. §. 275. XI.).

XI. Jeder singuläre Werth von $F=0$ findet sich, wenn man aus $F=0$

$$\partial^n y = (\pi_n)_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1}}$$

findet, dann aber

$$\partial(\pi_n)_{y_{n-1}} = \frac{1}{0} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\partial(\pi_n)_{y_{n-1}}} = 0$$

setzt. (Vgl. §. 275. XII.).

XII. Umgekehrt gilt auch dieser andere Satz: Jeder Werth von y (in x), welcher

$$\partial(\pi_n)_{n-1} = \frac{1}{0} \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{\partial(\pi_n)_{y_{n-1}}} = 0$$

macht, dabei aber der $F=0$ genügt, kann nie ein besonderes Integral seyn, sondern ist allemal ein singulärer Werth von $F=0$. (Vgl. §. 275. XIII.).

XIII. Jede gegebene Differenzialgleichung der nten Ordnung läßt sich durch Einführung eines neuen Veränderlichen allemal so umformen, daß alle ihre singulären Werthe als solche der ersten Art erscheinen, d. h. als bloße Faktoren einer niedrigern (als die nte) Ordnung hervortreten, während der andere Faktor dann eigentlich erst die Differenzialgleichung der nten Ordnung ist.

Der Beweis wird ganz analog dem (§. 275. XIV.) gegebenen geführt, indem man sich ein allgemeines erstes Integral von $F=0$ denkt in der Form

$$\partial^{n-1} y = \varphi_{x,y,y_1,\cdots y_{n-2},a},$$

und nun als Gleichung zwischen y und dem neuen Veränderlichen z

$$\partial^{n} y = \varphi'_{x,y,y_1,\cdots y_{n-2},z}$$

annimmt, wo φ' von φ nur dadurch verschieden ist, daß in φ' jedesmal z steht, wo in φ die Konstante a zu finden ist.

XIV. Daraus folgt wieder wie im (§. 275. XV. und §. 270 XIV.):

α) Ist das allgemeine erste Integral von $F=0$ in der Form

1) $$\partial^{n-1} y = \varphi_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-2},a}$$

vorgestellt, und enthält

2) $$\partial \varphi_a = 0$$

den Buchstaben a noch wirklich; so genügt der aus (1. und 2.) durch Elimination von a gezogene Werth

3) $$V_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}} = 0$$

allemal der $F=0$ wirklich.

β) In dem Falle also, daß der singuläre Werth nach der Regel (VIII. β.) gefunden werden sollte, ist eine besondere Prüfung, ob der aus

$$\varphi_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1},a} = 0 \quad \text{und} \quad \partial\varphi_a = 0$$

durch Elimination von a gezogene Werth

$$V_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}} = 0$$

der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ auch wirklich genügen werde, überflüssig.

γ) Wenn man die singulären Werthe von $F = 0$ nach der Regel (II.) d. h. dadurch findet, daß man $\partial^{n+1}y = \frac{0}{0}$ setzt; so ist eine besondere Prüfung, ob auch wirklich der $F = 0$ genügt sey, ebenfalls unnöthig.

XV. Man kann versuchen, unendlich viele verschiedene Differenzialgleichungen der nten Ordnung zu finden, welche alle einen und denselben singulären Werth $V = 0$ haben. Man nimmt nämlich eine beliebige Gleichung der nten Ordnung an, z. B.

$$P_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}} + Q_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}} \cdot \partial^n y = 0,$$

multiplizirt solche mit dem gegebenen V, und sucht dann einen neuen Veränderlichen z so einzuführen, daß in der Gleichung

$$VP + VQ \cdot \partial^n y = 0$$

der gemeinschaftliche Faktor V nicht mehr sichtbar ist. (Vgl. §. 270. XV.).

Man kann aber auch das Verfahren des Lagrange anwenden (§. 270. XVI. und §. 275. XVI.), und von einer beliebigen Ur-Gleichung $f = 0$ ausgehen mit $n+1$ willkührlichen Konstanten $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}$. Man findet dann aus $f = 0$ und aus ihren n Ableitungsgleichungen $\partial f_{(x)} = 0$, $\partial^2 f_{(x)} = 0, \cdots \partial^n f_{(x)} = 0$, die $n+1$ Konstanten alle als Funktionen von $x, y, y_1, y_2, \cdots y_n$ ausgedrückt, welche durch μ_1, $\mu_2, \mu_3, \cdots \mu_n, \mu_{n+1}$ vorgestellt seyn sollen. Hernach findet man aus dem gegebenen singulären Werth $V = 0$ und $\partial V_{(x)} = 0$ sowohl y_n als auch y_{n-1}, setzt diese Werthe in die $n+1$ Gleichungen $a_1 = \mu_1, a_2 = \mu_2, \cdots a_{n+1} = \mu_{n+1}$, und eliminirt

zuletzt aus diesen $n+1$ Gleichungen die n Ausdrücke $x, y, y_1, \cdots y_{n-2}$. Dann erhält man eine Gleichung $\varphi = 0$, bloß zwischen den $n+1$ Konstanten $a_1, a_2, \cdots a_n, a_{n+1}$. Werden nun in dieser letztern Gleichung $\varphi = 0$, statt der Konstanten $a_1, a_2, \cdots a_{n+1}$ die Funktionen $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n, \mu_{n+1}$ gesetzt; so hat man die gesuchte Differenzialgleichung der nten Ordnung, welche im Allgemeinen $V = 0$ zum singulären Werth hat, und $f = 0$ zum allgemeinen Ur-Integral, wenn in $f = 0$ unter a_{n+1} der aus

$$\varphi_{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}} = 0$$

sich dafür ergebende Werth gedacht wird.

Denn es geht aus dem Verfahren deutlich hervor:

1) daß der Gleichung

$$\varphi_{\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n, \mu_{n+1}} = 0$$

durch den Werth $V = 0$ wirklich genügt wird.

2) Daß $f = 0$, wenn unter a_{n+1} der aus

$$\varphi_{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}} = 0$$

zu ziehende Werth gedacht wird, auch das allgemeine Integral mit seinen n Konstanten von

$$\varphi_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots \mu_n, \mu_{n+1}} = 0$$

ist; weil letztere Gleichung sich ergiebt, wenn man aus

$$f = 0, \quad \partial f_{(x)} = 0, \quad \partial^2 f_{(x)} = 0, \cdots \partial^n f_{(x)} = 0$$

die n Konstanten eliminirt, d. h. die $n+1$ Konstanten findet, und diese Werthe in die Gleichung

$$\varphi_{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}} = 0$$

substituirt.

3) Daß die Funktionen $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_{n+1}$ durch den Werth $V = 0$ in Funktionen von x, y und den Ableitungen von y bis zur $n-2$ten Ordnung hin übergehen, also in der Regel **nicht** in konstante Ausdrücke: daß demnach der Werth $V = 0$ in dem allgemeinen Ur-Integral $f = 0$ mit seinen n Konstanten $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ im Allgemeinen **nicht** enthalten, folglich kein besonderes Integral, sondern ein singulärer Werth ist. (Vgl. §. 270. XVI. und §. 275. XVI.).

XVI. Auch läßt sich wiederum zeigen, daß jede Gleichung

1) $$\varphi_{a_1,a_2,a_3,\cdots a_n,a_{n+1}} = 0,$$

wenn man in ihr die aus einer beliebigen Ur-Gleichung

2) $$f_{x,y,a_1,a_2,a_3,\cdots a_n,a_{n+1}} = 0$$

und ihren n Ableitungsgleichungen gezogenen Werthe

3) $a_1 = \mu_1,\ a_2 = \mu_2,\ a_3 = \mu_3,\ \cdots\ a_n = \mu_n,\ a_{n+1} = \mu_{n+1}$

statt $a_1, a_2, \cdots a_n, a_{n+1}$ substituirt, allemal eine Differenzialgleichung von der nten Ordnung wird, welche erlaubt, daß das aus ihr und ihrem Differenzial gezogene $\partial^{n+1}y$ auf die Form $\frac{0}{0}$ gebracht werde, welche also in der Regel einen singulären Werth hat.

Denn da die Gleichungen (3.) alle als allgemeine erste Integralgleichungen einer und derselben Differenzialgleichung der n+1ten Ordnung

4) $$\partial^{n+1}y + W_{x,y,y_1,\cdots y_n} = 0$$

angesehen werden müssen; so sind ihre Ableitungen

5) $\partial(\mu_1)_{(x)} = 0,\ \partial(\mu_2)_{(x)} = 0, \cdots \partial(\mu_n)_{(x)} = 0,\ \partial(\mu_{n+1})_{(x)} = 0$

alle, eine und dieselbe Differenzialgleichung der n+1ten Ordnung, nämlich die (4.), so daß die Ausdrücke (5.) alle, den Faktor $\partial^{n+1}y + W$ (in 4.) mit einander gemein, übrigens aber noch einen zweiten verschiedenen Faktor $P_1, P_2, \cdots P_n, P_{n+1}$ haben, welcher, in Bezug auf die Ableitungen von y, höchstens von der nten Ordnung seyn kann. Weil nun das Differenzial von

$$\varphi_{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\cdots\mu_n,\mu_{n+1}} = 0$$

die Form

6) $$\partial\varphi_{\mu_1}\cdot\partial(\mu_1)_{(x)} + \partial\varphi_{\mu_2}\cdot\partial(\mu_2)_{(x)} + \cdots + \partial\varphi_{\mu_{n+1}}\cdot\partial(\mu_{n+1})_{(x)} = 0$$

annimmt; so läßt es sich nun auch in zwei Faktoren zerlegen, von welchen der zweite die Gleichung (4.) der n+1ten Ordnung, der andere dagegen, nämlich

7) $$\partial\varphi_{\mu_1}\cdot P_1 + \partial\varphi_{\mu_2}\cdot P_2 + \cdots + \partial\varphi_{\mu_{n+1}}\ P_{n+1} = 0,$$

nur von der nten Ordnung seyn, und die singulären Werthe liefern wird.

Und die Faktoren $P_1, P_2, \cdots P_n, P_{n+1}$ sind wiederum offenbar nichts anderes als beziehlich die Ausdrücke

$$\partial(\mu_1)_{y_n}, \quad \partial(\mu_2)_{y_n}, \cdots \partial(\mu_n)_{y_n}, \quad \partial(\mu_{n+1})_{y_n},$$

weil z. B.

$$\partial(\mu_1)_{(x)} = \partial(\mu_1)_x + \partial(\mu_1)_y \cdot \partial y + \cdots + \partial(\mu_1)_{y_n} \cdot \partial^{n+1} y$$

ist, und doch zu gleicher Zeit

$$\partial(\mu_1)_{(x)} = P_1 \cdot W + P_1 \cdot \partial^{n+1} y$$

seyn muß. Und der Faktor (7.), welcher den singulären Werth giebt, ist demnach nichts anderes als die Ableitung von

$$\varphi_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots \mu_n, \mu_{n+1}} = 0$$

nach dem bloßen y_n genommen. (Vgl. §. 270. XVII. und §. 275. XVII.).

Beispiel. Nimmt man zwischen a_1, a_2, a_3 die Gleichung

1) $$a_3 = a_2^2 + a_1^2,$$

und außerdem noch die beliebige Ur-Gleichung

2) $$y - \tfrac{1}{2} a_1 x^2 - a_2 x - a_3 = 0$$

nebst ihren beiden Ableitungen

3) $\partial y - a_1 x - a_2 = 0$ und 4) $\partial^2 y - a_1 = 0,$

um aus ihnen

5) $a_1 = \partial^2 y$, 6) $a_2 = \partial y - x \cdot \partial^2 y$, und 7) $a_3 = y - x \cdot \partial y + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y$

zu finden, und diese Werthe in (1.) zu substituiren; so erhält man eine Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, nämlich

8) $$y - x \cdot \partial y + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y - (\partial y - x \cdot \partial^2 y)^2 - \partial^2 y^2 = 0,$$

welche zum allgemeinen Integral die Gleichung (2.) hat, wenn statt a_3 dessen Werth aus (1.) gesetzt wird, welche aber auch einen singulären Werth hat, der gefunden wird, wenn man zwischen ihr und ihrer Ableitung nach dem bloßen $\partial^2 y$ oder y_2, nämlich zwischen ihr und der Gleichung

9) $\frac{1}{2}x^2+2x(\partial y-x\cdot\partial^2 y)-2\cdot\partial^2 y=0$,

dieses $\partial^2 y$ selbst eliminirt, so daß solcher

10) $(1+x^2)\cdot y-(x+\frac{1}{2}x^3)\cdot\partial y-\partial y^2+\frac{1}{16}x^4=0$

seyn wird.

XVII. Bleiben die Annahmen der vorhergehenden Nummer (XVI.) beibehalten; so läßt sich zu gleicher Zeit noch behaupten, daß die Quozienten je zweier der Ausdrücke der $(n+1)$ten Ordnung

$$\partial(\mu_1)_{(x)},\ \partial(\mu_2)_{(x)},\ \partial(\mu_3)_{(x)},\ \cdots\ \partial(\mu_n)_{(x)},\ \partial(\mu_{n+1})_{(x)},$$

weil sie den Quozienten der Faktoren

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots\ P_n,\ P_{n+1}$$

d. h. der Ausdrücke

$$\partial(\mu_1)_{y_n},\ \partial(\mu_2)_{y_n},\ \partial(\mu_3)_{y_n},\ \cdots\ \partial(\mu_n)_{y_n},\ \partial(\mu_{n+1})_{y_n}$$

beziehlich gleich sind, allemal von $\partial^{n+1}y$ frei seyn, demnach nur die Ableitungen von y höchstens bis zur nten Ordnung enthalten werden.

Umgekehrt läßt sich aber nun beweisen, daß, wenn $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots \mu_n, \mu_{n+1}$ beliebig gegebene Funktionen von $x, y, y_1, y_2, \cdots y_n$ sind, dabei aber die Eigenschaft haben, daß die Quozienten je zweier ihrer Ableitungen nach allem x, von $\partial^{n+1}y$ frei, d. h. in Bezug auf die Ableitungen von y von derselben Ordnung, wie die Funktionen $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_{n+1}$ selbst sind, — daß dann allemal eine Ur-Gleichung $f=0$ mit $n+1$ Konstanten dergestalt existirt, daß, wenn man aus ihr und ihren n Ableitungs-Gleichungen $\partial f_{(x)}=0,\ \partial^2 f_{(x)}=0,\ \cdots\ \partial^n f_{(x)}=0$ die $n+1$ Konstanten in $x, y, y_1, \cdots y_n$ ausgedrückt findet, diese Ausdrücke genau die gegebenen $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_{n+1}$ werden. Und diese Gleichung $f=0$ findet man dann allemal, wenn man jede dieser Funktionen

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \cdots\ \mu_n,\ \mu_{n+1}$$

einer Konstante, z. B. beziehlich

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_n,\ a_{n+1}$$

gleich setzt, und aus den $n+1$ Gleichungen die n Unbekannten $y_1, y_2, y_3, \cdots y_n$ eliminirt.

Denn nach der Voraussetzung ist

$$\partial(\mu_2)_{(x)} = M_1 \cdot \partial(\mu_1)_{(x)}, \quad \partial(\mu_3)_{(x)} = M_2 \cdot \partial(\mu_1)_{(x)},$$

. . . . . .

$$\partial(\mu_n)_{(x)} = M_{n-1} \cdot \partial(\mu_1)_{(x)}, \quad \partial(\mu_{n+1})_{(x)} = M_n \cdot \partial(\mu_1)_{(x)},$$

wo $M_1, M_2, M_3, \cdots M_n$ Funktionen von $x, y, y_1, y_2, \cdots y_n$ sind, ohne y_{n+1} d. h. ohne $\partial^{n+1}y$ zu enthalten. Alle Werthe von y in x mit $n+1$ Konstanten, welche demnach der Gleichung der $(n+1)$ten Ordnung $\partial(\mu_1)_{(x)} = 0$ genügen, genügen also nothwendig auch den Gleichungen

$$\partial(\mu_2)_{(x)} = 0, \quad \partial(\mu_3)_{(x)} = 0, \cdots \partial(\mu_n)_{(x)} = 0, \quad \partial(\mu_{n+1})_{(x)} = 0.$$

Alle diese Gleichungen mit Inbegriff der $\partial(\mu_1)_{(x)} = 0$ sind daher nothwendig eine und dieselbe Differenzialgleichung der $(n+1)$ten Ordnung durch verschiedene Faktoren von einander, der Form nach, verschieden. Integrirt man daher diese $n+1$ Gleichungen; so daß man

$$\mu_1 = a_1, \quad \mu_2 = a_2, \quad \mu_3 = a_3, \cdots \mu_n = a_n, \quad \mu_{n+1} = a_{n+1}$$

erhält, wo $a_1, a_2, \cdots a_{n+1}$ willkührliche Konstanten seyn mögen; so hat man $n+1$ verschiedene allgemeine erste Integrale dieser Differenzialgleichung der $n+1$ten Ordnung, aus welchen dann, nach (§. 279.), durch Elimination von $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Ur-Gleichung $f = 0$ mit den $n+1$ Konstanten $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}$ hervorgeht.

Ist daher zwischen diesen Funktionen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots \mu_n, \mu_{n+1}$ irgend eine Gleichung

$$\varphi_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots \mu_n, \mu_{n+1}} = 0$$

gegeben, welche eine Differenzialgleichung der nten Ordnung seyn wird; so ist offenbar ihre Ur-Gleichung die so eben gefundene $f = 0$, wenn eine ihrer Konstanten durch die Gleichung

$$\varphi_{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, a_{n+1}} = 0$$

in den n übrigen ausgedrückt wird. Und diese Gleichung hat dann auch einen singulären Werth, der jedoch zuweilen ein besonderes Integral seyn kann, und welchen man namentlich auch dann erhält, wenn man aus ihr und ihrer Ableitung nach dem bloßen y_n dieses y_n selber eliminirt (nach XVI.).

Beispiel. Ein hierher gehöriges Beispiel hat man, wenn $n = 1$, $\mu_1 = y - x \cdot \partial y$, $\mu_2 = \partial y$, und

1) $\varphi_{\mu_1,\mu_2} = 0$ oder $\mu_1 + \psi_{\mu_2} = 0$ d. h. $y - x \cdot \partial y + \psi_{\partial y} = 0$

die gegebene Differenzialgleichung (diesmal der 1sten Ordnung) ist. Es ist nämlich hier wirklich der Quotient

2) $$\frac{\partial(\mu_1)_{(x)}}{\partial(\mu_2)_{(x)}} = \frac{-x \cdot \partial^2 y}{\partial^2 y} = -x$$

von $\partial^2 y$ befreit; also erhält man das allgemeine Integral, wenn man aus

3) $y - x \cdot \partial y = a_1$ und 4) $\partial y = a_2$

das Zeichen ∂y eliminirt. Dadurch geht aber

5) $$y = a_2 \cdot x + a_1$$

hervor, während zwischen a_2 und a_1 noch die Gleichung

6) $\varphi_{a_1,a_2} = 0$ oder $a_1 + \psi_{a_2} = 0$

statt findet, so daß das allgemeine Integral (5.) jetzt in

7) $$y = a_2 \cdot x - \psi_{a_2}$$

übergeht.

Und dieselbe Gleichung (1.) hat nun auch einen singulären Werth, welcher erhalten wird, wenn man aus ihr und ihrer Ableitung nach dem bloßen y_1, nämlich aus ihr und aus

8) $$-x + \partial\psi_{y_1} = 0$$

y_1 selbst eliminirt. Dieser singuläre Werth ist daher

9) $$y - x \cdot \nu_x + \psi_\nu = 0,$$

wenn ν_x der Werth ist, welcher aus (8.) für y_1 (in x) hervorgeht*).

Uebrigens ist diese Differenzialgleichung (1.) ein besondrer Fall der früher (§. 278. Beispiel.) allgemeiner ausgesprochenen.

XVIII. Jeder singuläre Werth einer Differenzialgleichung der nten Ordnung $F = 0$ ist in der Regel eine Differenzialgleichung der $(n-1)$ten Ordnung (nie einer höhern, wohl aber öfters

---

*) In einigen bekanntern Lehrbüchern findet man dieselbe Gleichung (1.) unter der Form

$$y = p \cdot x + P$$

behandelt, wo p die Ableitung ∂y oder y_1, P dagegen eine beliebige Funktion von p (d. h. von ∂y) vorstellen soll.

einer niedrigern Ordnung)', und kann daher durch eine Ur-Gleichung mit höchstens n—1 willkührlichen Konstanten c_1, c_2, c_3, ··· c_{n-1} vorgestellt werden.

Es kann aber dieser singuläre Werth, als eine Differenzialgleichung der n—1ten Ordnung, selber wieder einen singulären Werth haben, welcher im Allgemeinen eine Differenzialgleichung der n—2ten Ordnung seyn wird, und diese kann dann wieder einen singulären Werth haben, im Allgemeinen von der n—3ten Ordnung. Dieser letztere würde dann ein dreifacher singulärer Werth von $F = 0$ genannt werden. Man sieht zugleich wie nun auch ein nfacher singulärer Werth von $F = 0$ möglich ist, welcher als eine Ur-Gleichung (ohne Ableitungen von y und) ohne eine willkührliche Konstante existiren wird.

Dieser nfache singuläre Werth wird aber aus dem allgemeinen Ur-Integral von $F = 0$ mit seinen n willkührlichen Konstanten a_1, a_2, a_3, ··· a_n, nämlich aus

$$f_{x,y,a_1,a_2,\cdots a_n} = 0$$

gefunden, wenn man aus letzterer Gleichung und aus ihren Ableitungen nach den einzelnen Konstanten, nämlich

$$\partial f_{a_1} = 0, \quad \partial f_{a_2} = 0, \quad \partial f_{a_3} = 0, \cdots \partial f'_{a_n} = 0$$

diese n Konstanten a_1, a_2, ··· a_n selbst eliminirt.

Dieser nfache singuläre Werth von $F = 0$ genügt jedoch der Gleichung $F = 0$ im Allgemeinen nicht. (Vgl. §. 275. XIX.).

Schluß-Anmerkung.

Man wird das Wesen dieser hier betrachteten Differenzial- und Integralgleichungen noch leichter auffassen, wenn man sich folgende Punkte lebhaft in das Gedächtniß zurückruft:

1) Jede Gleichung ist dem Wesen nach allemal eine identische. (Vgl. Einleit. zum III. Th. d. S. pag. 8. Nr. 7.).

2) Jede Gleichung, welche aus einer gegebenen Gleichung richtig gefolgert ist, ist nothwendig wiederum eine richtige (identische), d. h. die Voraussetzungen, unter denen die gegebene Gleichung richtig ist, machen auch die gefolgerte zur richtigen Gleichung. Nicht aber machen umgekehrt Werthe, welche eine gefolgerte Gleichung identisch machen, noth-

wendig die erstere identisch, aus welcher die andere gefolgert worden ist, so lange man nicht nachgewiesen hat, daß umgekehrt auch die erstere aus der andern gefolgert werden kann.

3) Daher kann es Funktionen y_x von x geben, welche einer gegebenen Differenzialgleichung genügen, ohne eine andere (z. B. Integral-) Gleichung identisch machen zu müssen, aus welcher die erstere (durch Differenziiren, oder durch Differenziiren und Elimininen zugleich, oder dgl.) gefolgert ist. Weil aber aus jeder gegebenen Differenzialgleichung ein Ur-Integral gefunden werden kann, welches alle möglichen Ur-Integrale in sich begreift, und allen niedrigern Integralen (den 1ten, 2ten, 3ten, ꝛc.) genügen muß; so folgt, daß alle Funktionen y_x von x, welche einer gegebenen Differenzialgleichung genügen, in dem allgemeinen Ur-Integral oder doch in den singulären Werthen enthalten seyn werden, sobald nur die willkührlichen Konstanten zweckgemäß bestimmt werden; daß also derselbe Werth y_x, wenn er in einem allgemeinen Ur-Integral begriffen ist, unter der Voraussetzung, daß die Konstanten dieselben bestimmten Werthe bedeuten, auch jedem allgemeinen niedrigern Integral genügen werde. Deshalb müssen durch Substitutionen solcher Werthe y_x in die allgemeinen Integrale, wenn auch noch nicht gerade identische Gleichungen, aber doch Gleichungen bloß zwischen den Konstanten hervorgehen, welche aber insofern identische sind, als gerade durch sie das Verhalten der Konstanten zu einander bestimmt wird, durch welches sie nun eben identische Gleichungen werden.

4) Der wichtigste Punkt jedoch, auf den hier noch einmal aufmerksam gemacht werden muß, ist der:

Wenn aus 2 Gleichungen eine 3te durch Elimination gefolgert wird, so folgen aus der alleinigen 3ten nicht die beiden erstern. Alle Werthe der Unbekannten, welche die beiden erstern identisch machen, müssen daher nothwendig auch die 3te identisch machen; aber eine Menge von Werthen der Unbekannten können die 3te identisch machen, ohne eine der beiden erstern zu gleicher Zeit identisch machen zu müssen. (Vgl. III. Th. p. 242. Note.)

Es kann daher z. B. eine Funktion y von x gesucht werden, welche den Bedingungen der Aufgabe zufolge zweien Differenzialgleichungen der 1ten Ordnung

$$F_{x,y,\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad F'_{x,y,\partial y} = 0$$

zu genügen hat. Man eliminirt ∂y aus

$$F = 0 \quad \text{und} \quad F' = 0, \quad \text{erhält} \quad F''_{x,y} = 0;$$

würde aber nun sehr im Irrthum seyn, wenn man glauben wollte, daß letztere Gleichung die Funktion y_x nothwendig so liefern müsse, daß dadurch die beiden Gleichungen $F = 0$, $F' = 0$, identisch werden. Alles was man schließen kann ist: unter allen Werthen y_x, welche $F'' = 0$ für y liefert, müssen diejenigen mit begriffen seyn, wenn es deren giebt, welche den Gleichungen

$$F = 0 \qquad \text{und} \qquad F' = 0$$

zugleich genügen. Sehr oft wird es aber gar keine Werthe y_x von x geben, welchen beide letztere Eigenschaften zugleich zukommen.

5) Endlich ist hinsichtlich der Anwendungen noch folgendes zu berücksichtigen:

Irgend eine Aufgabe des praktischen Lebens oder der Physik, in welcher eine Funktion y_x von x gesucht wird, ist durch $n+1$ Bedingungen gegeben. Die eine dieser Bedingungen führe zu einer Differenzialgleichung der nten Ordnung, so giebt diese, durch Integration auf irgend einem Wege, ein allgemeines Ur-Integral mit n willkührlichen Konstanten. Aus allen diesen Funktionen von x, welche nach den verschiedenen besondern Werthen der n Konstanten durch das allgemeine Ur-Integral gegeben sind, muß dann diejenige bestimmte und einzige herausgesucht werden, welche den noch übrigen n der obigen Bedingungen der Aufgabe genügt, und es bestimmen sich also noch mittelst der n übrigen Bedingungen die n Konstanten.

Hat die Aufgabe selbst, außer derjenigen Bedingung, welche zur Differenzialgleichung der nten Ordnung geführt hat, nicht noch n andern Bedingungen, sondern einer geringeren Anzahl derselben zu genügen; so kann ihr vielleicht der singuläre Werth entsprechen, vielleicht auch das Ur-Integral, in welchem jedoch noch einige Konstanten völlig willkührlich bleiben, so daß die Aufgabe selbst noch unendlich viele Auflösungen zuläßt, und deshalb noch mehreren neuen Bedingungen unterworfen werden kann.

Zweite Abtheilung.

Von den Differenzialgleichungen zwischen drei und mehreren Veränderlichen, von welchen nur ein einziger Veränderlicher als unabhängig gedacht ist. Elimination eines der Veränderlichen nebst seinen Ableitungen. Integration solcher Gleichungen.

---

§. 281. Aufgabe.

Man soll alle Funktionen y_x, z_x von x finden, welche den beiden gegebenen Differenzialgleichungen

$$1) \quad F_{x,y,\partial y,\cdots\partial^m y,z,\partial z,\partial^2 z,\cdots\partial^n z} = 0,$$

$$2) \quad f_{x,y,\partial y,\cdots\partial^q y,z,\partial z,\cdots\partial^r z} = 0,$$

in welchen alle Ableitungen nach x genommen sind, entsprechen, d. h. beide Gleichungen zugleich identisch machen.

Auflösung. A) Man eliminire aus beiden gegebenen Gleichungen, sowohl z als auch ∂z, $\partial^2 z$, $\partial^3 z$, u. s. f., d. h. z und alle Ableitungen von z, so daß man eine Gleichung erhält, bloß zwischen x,y und den Ableitungen von y.

B) Um aber diese Elimination zu bewirken, nehme man von $F=0$ noch r mal hinter einander die Ableitungen nach allem x, so daß man die $r+1$ Gleichungen

$$(I.) \cdots F=0,\ \partial F_{(x)}=0,\ \partial^2 F_{(x)}=0,\ \partial^3 F_{(x)}=0,\cdots,\partial^r F_{(x)}=0$$

erhält, in denen die Ausdrücke $\partial F_{(x)}$, $\partial^2 F_{(x)}$,$\cdots$, $\partial^r F_{(x)}$ immer höhere Ableitungen von y und z enthalten, namentlich bis zu $\partial^{m+r} y$ und $\partial^{n+r} z$ hin.

Eben so nehme man von $f=0$ noch die nächsten n Ableitungsgleichungen, so daß man $n+1$ Gleichungen

$$(II.) \cdots \quad f=0,\ \partial f_{(x)}=0,\ \partial^2 f_{(x)}=0,\cdots,\ \partial^n f_{(x)}=0$$

hat, in denen die Ausdrücke $\partial f_{(x)}$, $\partial^2 f_{(x)}$,$\cdots$, $\partial^n f_{(x)}$ immer hö-

here Ableitungen von y und z nach x enthalten, namentlich bis zu $\partial^{q+n}y$ und $\partial^{n+r}z$ hin.

Nachgehends eliminire man aus den r+1 Gleichungen in (I.) und den n+1 Gleichungen in (II.), also aus n+r+2 Gleichungen, die in ihnen vorkommenden n+r+1 Unbekannten, nämlich z, ∂z, $\partial^2 z$, $\partial^3 z$, ..., $\partial^{n+r}z$ auf algebraischem Wege; so daß zuletzt eine einzige Gleichung übrig bleibe, welche bloß noch x, y und Ableitungen von y, bis zu $\partial^{m+r}y$ und $\partial^{n+q}y$ hin, enthält, wo entweder m+r größer oder kleiner oder gleich n+q ist. — Wir wollen die höchste Ordnung dieser Ableitung von y durch ν bezeichnen.

C) Diese Eliminationsgleichung in y von der νten Ordnung integrire man nun nach (§. 277.), um allgemein y mit den ν willkührlichen Konstanten zu erhalten, etwa $y = \varphi_x$.

Setze dann diese Funktion φ_x, nebst ihren Ableitungen $\partial\varphi_x$, $\partial^2\varphi_x$, ..., $\partial^m\varphi_x$, $\partial^q\varphi_x$, ꝛc. in die gegebenen Gleichungen (1. u. 2.), nämlich in $F = 0$ und $f = 0$ (welche beide zugleich identisch werden sollen), aber auch in so viele der übrigen der Gleichungen (B. I. u. II.) beziehlich statt y, ∂y, $\partial^2 y$, ..., $\partial^m y$, $\partial^q y$, ꝛc., um die nöthige Zahl von Gleichungen zu erhalten, aus denen alle anwesenden Ableitungen von z algebraisch eliminirt werden können, so daß zuletzt z selbst allein übrig bleibt, und in x und denselben ν willkührlichen Konstanten ausgedrückt werden kann, in denen vorher y ausgedrückt worden ist.

Beispiel. Sind z. B. gegeben die beiden Gleichungen

1) $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + m \cdot \partial y + n \cdot \partial z + p \cdot \partial^2 y = 0$

2) $a_1 \cdot x + m_1 \cdot \partial y + n_1 \cdot \partial z + q \cdot \partial^2 z = 0,$

und wollte man z und alle Ableitungen von z eliminiren; so müßte man die (1.) zweimal, die (2.) dagegen nur einmal nach allem x differenziiren, und man erhielte aus der (1.)

3) $a + b \cdot \partial y + c \cdot \partial z + m \cdot \partial^2 y + n \cdot \partial^2 z + p \cdot \partial^3 y = 0$

4) $b \cdot \partial^2 y + c \cdot \partial^2 z + m \cdot \partial^3 y + n \cdot \partial^3 z + p \cdot \partial^4 y = 0,$

aus der (2.) dagegen

5) $a_1 + m_1 \cdot \partial^2 y + n_1 \cdot \partial^2 z + q \cdot \partial^3 z = 0.$

Man hat nun 5 Gleichungen, aus denen die 4 Unbekannten z, ∂z, $\partial^2 z$, $\partial^3 z$ sogleich eliminirt werden können, so daß man zuletzt die Gleichung zwischen x und y und den Ableitungen von y nach x von der 4ten Ordnung erhält, welche für dieses Beispiel die Form

6) $(A + B \cdot x) + D \cdot \partial y + E \cdot \partial^2 y + F \cdot \partial^3 y + G \cdot \partial^4 y = 0$

annehmen wird, unter A, B, D, E, F, G Zusammensetzungen aus a, b, c, m, n, p, a_1, m_1, n_1, q verstanden. — Integrirt man nun diese (6.), so erhält man y in x und 4 willkührlichen Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4. Wird nun diese Funktion $y_{x, C_1, C_2, C_3, C_4}$ statt y, so wie ihre Ableitungen statt ∂y, $\partial^2 y$, in die Gleichungen (1. 2. u. 3.) substituirt, und dann ∂z und $\partial^2 z$ algebraisch eliminirt; so bleibt eine Ur-Gleichung zwischen z, x und den 4 Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4, wodurch sich z bestimmt.

Noch bequemer wird es aber seyn, wenn man bei dem letztern Geschäft diejenigen Gleichungen in's Auge faßt, welche zunächst zur Gleichung (6.) geführt haben, weil darunter eine seyn muß, welche bloß ∂z, aber nicht mehr $\partial^2 z$, und noch weniger $\partial^3 z$ enthält; so daß sie direkt mit der (1.) durch Elimination von ∂z zu der Gleichung führt, welche z bestimmt.

Anmerkung. Ueberhaupt kommt es bei dieser Aufgabe alles darauf an, aus den beiden gegebenen Gleichungen, die vorher auf irgend einem Wege mit einander verbunden seyn können oder nicht, durch Differenziiren und durch Wiederholung dieses Differenziirens sich eine gehörige Anzahl neuer Gleichungen zu verschaffen, damit man zuletzt so viele Gleichungen habe, als deren nöthig sind, um z und alle Ableitungen von z eliminiren zu können, wenn nur nachgehends die entstehende Gleichung integrirt wird, um y mit den willkührlichen Konstanten zu erhalten, und wenn man nur zuletzt z nicht mehr durch neues Integriren, sondern bloß auf dem Wege der algebraischen Elimination sich verschafft. Deshalb kann das im (§.) beschriebene Verfahren noch sehr verschiedene Abänderungen erleiden.

§. 282. Zusatz.

Sind 3 solche Gleichungen $F = 0$, $f = 0$, und $\psi = 0$, gegeben zwischen 4 Veränderlichen, nämlich zwischen dem unab-

hängig Veränderlichen x und 3 unbekannten Funktionen y, z, u von x, und ihren Ableitungen nach x (in jeder Gleichung für jede dieser Funktionen bis zu einer beliebigen Ordnung hin); so kann man aus $F=0$ und $\psi=0$, zuerst u nebst allen Ableitungen von u (nach x) eliminiren, und dabei das Verfahren (§. 281. B.) anwenden, um 2 Gleichungen zu erhalten, welche weder u noch eine ihrer Ableitungen enthalten, so daß man zu der Aufgabe des vorhergehenden (§. 281.) sich zurückgeführt sieht.

Hat man aber y und z gefunden, so daß allen diesen letztern Gleichungen ganz allgemein genügt ist; so muß man die nun für y, z, ∂y, ∂z, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, ꝛc. sich ergebenden Werthe nicht allein in die 3 gegebenen Gleichungen $F=0$, $f=0$, $\psi=0$, sondern auch in so viele ihrer Ableitungsgleichungen (nach allem x) substituiren, um alle Ableitungen von u algebraisch eliminiren, und so zuletzt u selbst in x und den durch die erste Integration eingegangenen ν willkührlichen Konstanten erhalten zu können.

Auch kann man durch fortgesetztes Differenziiren aller 3 Gleichungen $F=0$, $f=0$ und $\psi=0$ sich die nöthige Anzahl Gleichungen verschaffen, um nicht bloß u mit allen seinen Ableitungen, sondern auch zugleich z mit allen seinen Ableitungen, ja wohl auch noch einige der höchsten Ableitungen von y eliminiren, und so die Gleichung bloß zwischen x und y erhalten zu können, welche y in x mit den nöthigen willkührlichen Konstanten liefert. Hernach kann z und u ohne neue Integration wiederum dazu gefunden werden.

Anmerkung 1. Es ist leicht, das Verfahren auch auf n Differenzialgleichungen, zwischen $n+1$ Veränderlichen, welche zur Bestimmung von n Funktionen y, z, u, v, w, ꝛc. von x gegeben sind, auszudehnen, und so mittelst Integration einer einzigen Differenzialgleichung (nach §. 279.) eine der Funktionen y mit den nöthigen willkührlichen Konstanten zu finden, die übrigen gesuchten Funktionen z, u, v, w ꝛc. dagegen dann bloß durch Substitution und algebraische Elimination (also namentlich

ohne neue Integration) in dieselben willkührlichen Konstanten und in x ausgedrückt zu erhalten.

Wir wollen jedoch hier noch den besondern Fall näher betrachten, wo die n Gleichungen zwischen den n+1 Veränderlichen $x, x', x'', x''', \cdots, x^{(n)}$ alle in Bezug auf jeden der n abhängigen Veränderlichen $x', x'', x''', \cdots x^{(n)}$ nur die ersten Ableitungen enthalten. In diesem Falle kann man nämlich die n gegebenen Gleichungen nach den n in ihnen vorkommenden Ableitungen $\partial x'_x, \partial x''_x, \partial x'''_x, \cdots, \partial x^{(n)}_x$ algebraisch auflösen, und so n Gleichungen von der Form

1) $\partial x'_x = X', \quad \partial x''_x = X'', \quad \partial x'''_x = X''', \cdots, \partial x^{(n)}_x = X^{(n)},$

erhalten, wo $X', X'', \cdots, X^{(n)}$ im Allgemeinen Funktionen der n+1 Veränderlichen $x, x', \cdots, x^{(n)}$ seyn werden. Differenziirt man nun bloß eine der n Gleichungen (1.) z. B. die erste, n—1 mal hintereinander nach allem x, substituirt aber dabei nach jeder einzelnen dieser Differenziationen, statt der entstandenen $\partial x''_x, \partial x'''_x, \cdots \partial x^{(n)}_x$ allemal sogleich ihre Werthe aus den übrigen Gleichungen (1.); so hat man zugleich n Gleichungen, welche die Ableitungen $\partial x'_{x'}, \partial^2 x'_{x'}, \partial^3 x'_{x'}, \cdots, \partial^n x'_x$ liefern, ausgedrückt in die n+1 Veränderlichen $x, x', x'', x''', \cdots, x^{(n)}$, nämlich

2) $\partial x'_x = f_1, \quad \partial^2 x'_x = f_2, \cdots \partial^n x'_x = f_n,$

wo $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ Funktionen von $x, x', x'', \cdots, x^{(n)}$ sind.

Eliminirt man nachgehends auf algebraischem Wege aus diesen letztern n Gleichungen, die n—1 Veränderlichen $x'', x''', \cdots, x^{(n)}$, so erhält man eine Differenzialgleichung der nten Ordnung zwischen x, x' und den n Ableitungen $\partial x'_{x'}, \partial^2 x'_{x'}, \partial^3 x'_{x'}, \cdots \partial^n x'_{x'}$. Wird nun diese Gleichung integrirt, so erhält man x' als eine Funktion von x mit n willkührlichen Konstanten $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n$. Aus dieser Ur-Integralgleichung, oder auch auf direktem Wege, kann man sich nun aber auch von der letztern Differenzialgleichung der nten Ordnung n erste Integrale verschaffen von der Form

3) $F_1 = C_1$, $F_2 = C_2$, $F_3 = C_3, \cdots, F_n = C_n$,

wo F_1, F_2, $F_3 \cdots F_n$ Funktionen von x, x', $\partial x'_{x'}$, $\partial^2 x'_{x'}, \cdots$, $\partial^{n-1} x'_x$ sind. Hat man aber diese gefunden, so darf man nur statt der Ableitungen $\partial x'_{x'}$, $\partial^2 x'_{x'}, \cdots$, $\partial^{n-1} x'_x$ ihre Werthe aus den Gleichungen (2.), nämlich f_1, $f_2, \cdots$, f_{n-1} substituiren; und die n Gleichungen (3.) werden dann in eben so viele Gleichungen zwischen den $n+1$ Veränderlichen x, x', x'', x''', $\cdots$, $x^{(n)}$ übergehen, welche n Gleichungen daher die letztern n Veränderlichen als Funktionen des erstern x mit den n willkührlichen Konstanten C_1, C_2, $C_3, \cdots$, C_n geben.

Anmerkung 2. Ueberall und hier in den Aufgaben der (§. 281. u. §. 282.) wieder, ist es unerläßlich, daß man den Satz (§. 96. d. I. Th. d. S.) immer im Auge habe, d. h. nie durch einen Ausdruck wegdivire, welcher möglicher Weise Null seyn kann, d. h. daß man durch keine Funktion von x, y, $z, \cdots$ oder x, x', $x'' \cdots$ ꝛc. wegdividire, welche, wenn man sie der Null gleich setzt, gerade y ꝛc. oder x' ꝛc. so bestimmt, daß dem in der Aufgabe verlangten dadurch genügt wird, d. h. daß die gegebenen Gleichungen $F = 0$, $f = 0$, ꝛc. dadurch wirklich alle zugleich identisch werden. Geschieht dies hier, so wird man auch diejenigen Werthe nicht verfehlen, welche den gegebenen Gleichungen nur als Faktoren einer niedrigern Ordnung genügen, und daher nur singuläre Werthe seyn können.

Anmerkung. 3. Da jede Differenzialgleichung zwischen y und z und den Ableitungen von z nach y, nämlich ∂z_y, $\partial^2 z_y$ ꝛc., wenn man sich y, also auch z selber wieder als Funktionen irgend eines neuen Veränderlichen x denkt, dadurch daß man dem zufolge nach (§. 58. d. III. Th. d. S.)

$$\frac{\partial z_x}{\partial y_x} \text{ statt } \partial z_y, \quad \frac{\partial y_y \cdot \partial^2 z_y - \partial z_x \cdot \partial^2 y_x}{\partial y_y^3} \text{ statt } \partial^2 z_y, \text{ ꝛc.}$$

setzt, in eine Gleichung zwischen y, z und den Ableitungen ∂y_x, ∂z_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ ꝛc. übergeht; so kann umgekehrt eine Gleichung

1) $$f_{y,z,\partial y,\partial z,\partial^2 y,\partial^2 z,\ldots} = 0$$

wenn sie zufällig x selbst nicht enthält (sondern bloß Ableitungen von y und z nach x), zuweilen auch in eine andere umgewandelt werden, welche bloß y und z und Ableitungen von z nach y enthält, so daß dieselbe direkt für sich nach der ersten Abtheilung dieses Kapitels weiter behandelt und integrirt werden kann.

Um dies systematisch zu untersuchen, wende man folgendes Verfahren an:

Weil nämlich allemal (nach §. 58. d. III. Th. d. S.)

2) $\partial z_x = \partial z_y \cdot \partial y_x$, 3) $\partial^2 z_x = \partial^2 z_y \cdot \partial y_x^2 + \partial z_y \cdot \partial^2 y_x$, ꝛc.

ist, so setze man in die zwischen y, z und ∂y, ∂z_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ ꝛc. gegebene Gleichung

$$f_{y,z,\partial y,\partial z,\partial^2 y,\partial^2 z\ldots} = 0$$

statt ∂z_x, $\partial^2 z_x$, ꝛc. die Ausdrücke zur Rechten in (2. 3. ꝛc.).

I. Heben sich nun alle Ableitungen von y nach x von selbst weg, so ist die gegebene Gleichung (1.) bloß eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen y und z und der Ableitungen der einen nach der andern.

II. Heben sich aber die Ableitungen von y nach x nicht von selbst weg, so kann man die mit denselben affizirten Glieder zusammenfassen und die Koeffizienten der letztern einzeln $= 0$ setzen. Dann erhält man mehrere Gleichungen zwischen y und z und den Ableitungen von z nach y, und man kann nun versuchen, ob es Funktionen z_y von y giebt, welche statt z gesetzt, diesen Gleichungen allen zugleich genügen. — Weil aber nun mehrere Gleichungen zur Bestimmung dieser Funktionen z_y beitragen; so steht zu erwarten, daß man nun nicht das allgemeinste Integral erhalten werde, sondern nur diejenigen von allen Integralen, welche gerade dieser besondern Bedingung genügen, nämlich der Bedingung, daß die Differenzialgleichung identisch wird, wenn nur $z = z_y$ genommen, für y dagegen jede beliebige Funktion von x gesetzt wird.

Wäre z. B. gegeben die Gleichung

1) $$M \cdot \partial^2 y + N \cdot \partial^2 z + P \cdot \partial y^2 + Q \cdot \partial y \cdot \partial z + R \cdot \partial z^2 = 0$$

wo P, Q, R Funktionen bloß von x und y seyn sollen, und setzte man hier $\partial z_y \cdot \partial y$ statt ∂z und $\partial^2 z_y \cdot \partial y^2 + \partial z_y \cdot \partial^2 y$ statt $\partial^2 z$; so erhielte man

2) $(M + N \cdot \partial z_y) \cdot \partial^2 y + (P + Q \cdot \partial z_y + R \cdot \partial z_y^2 + N \cdot \partial^2 z_y) \cdot \partial y^2 = 0,$

und diese Gleichung reduzirt sich sogleich bloß auf

3) $$P + Q \cdot \partial z_y + R \cdot \partial z_y^2 + N \cdot \partial^2 z_y = 0,$$

wenn, identisch

4) $$M + N \cdot \partial z_y = 0 \text{ ist.}$$

Außerdem aber könnte man Funktionen z_y von y suchen, welche statt z gesetzt, die Gleichungen (3. und 4.) zu gleicher Zeit identisch machen. Zu dem Ende müßte man die Gleichung (4.) differenziiren (nach allem y), dann aus dieser Differenzialgleichung und den beiden Gleichungen (3. und 4.) sowohl $\partial^2 z_y$ als auch ∂z_y eliminiren, die entstehende Gleichung aber, welches eine Gleichung bloß zwischen z und y ist, und durch

5) $$\varphi_{z,y} = 0$$

vorgestellt seyn kann, prüfen, ob sie wirklich beide Gleichungen (3. u. 4.) zu gleicher Zeit identisch macht. Nur wenn sich diese letztere Prüfung bewährt, giebt es solche Funktionen z_y von y, wie wir sie hier gesucht und für diesen Fall in der Gleichung (5.) auch schon gefunden haben.

Wird aber die Eliminationsgleichung (5.) identisch $0 = 0$; so genügt die Gleichung (4.) bereits der (3), und man darf nur noch die (4.) integriren, um z in y so zu haben, daß beiden Gleichungen (3. u. 4.) zu gleicher Zeit genügt wird.

Daß man aber in den beiden letztern Fällen, auch wenn $z = z_y$ so gefunden worden ist, daß der Gleichung (5.) genügt wird, nicht alle Integrale haben werde, ersieht man am besten aus dem speziellen Beispiele, wo

(A) ... $$y \cdot \partial^2 z_x - z \cdot \partial^2 y_x = 0$$

die gegebene Gleichung ist. Die Substitution von $\partial z_y \cdot \partial y_x$ statt ∂z_x und $\partial^2 z_y \cdot \partial y_x^2 + \partial z_y \cdot \partial^2 y_x$ statt $\partial^2 z_x$ giebt hier folgendes:

(B) ... $$y \cdot \partial^2 z_y \cdot \partial y_x^2 + (y \cdot \partial z_y - z) \cdot \partial^2 y_x = 0,$$

und liefert daher, wenn alle Ableitungen nach x fortfallen sollen,

(C) ... $y \cdot \partial^2 z = 0$ und (D) ... $y \cdot \partial z_y - z = 0,$

welchen beiden Gleichungen durch

(E) ... $z = cy$

allein genügt wird. Dagegen sieht man bald, daß der Gleichung (A) auch

(F) ... $y.\partial z_x - z.\partial y_x = C$

genügt, welche ein viel allgemeineres Integral ist als (D.) oder (E.), weil (D.) oder (E.) in dem besondern Falle aus (F.) hervorgehen, wo $C = 0$ genommen wird.

Soll also eine solche Gleichung zwischen y, z, ∂y_x, ∂z_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ ꝛc. durch eine andere ganz und vollkommen ersetzt werden können, welche bloß y und z und Ableitungen von z nach y enthält, so muß durchaus der Fall (I.) eintreten. Umgekehrt, tritt der Fall (II.) ein, so sind die Integrale, die man dann erhält, nie allgemein genug, und können daher nur als besondere Integrale angesehen werden.

Das Gesagte reicht aber aus, um allgemeinere Fälle darnach behandeln zu können. Die ganze Untersuchung gehört ohnedies nicht hieher, sondern in eine spätere Lehre (von der Integration der Differenzialfunktionen und den Bedingungsgleichungen der Integrabilität im VI. Th. d. S.), und wir haben nur hier einstweilen auf Erscheinungen aufmerksam machen wollen, welche bei dem Integriren vorkommen, und bei welchen der Anfänger hinsichtlich der Allgemeinheit des Integrals leicht irrige Ansichten haben könnte.

Schluß-Anmerkung.

In besondern Fällen kann man übrigens mehrere solche Differenzialgleichungen zwischen mehreren Veränderlichen integriren, ohne zu der im (§. 281.) angegebenen Elimination seine Zuflucht nehmen zu müssen. Diese gleichzeitige Integration (intégration des équations simultanées) soll aber in dem nächsten 6ten Theil dieses Systems näher betrachtet werden, woselbst auch die Integration der Gleichungen in endlicher Form, d. h. die dabei gewöhnlichen praktischen Methoden und die dazu anzustellenden Versuche beschrieben werden sollen.

Höhere Zahlenlehre.

Dreizehntes Kapitel.

Von den Differenzialgleichungen nach zwei und mehr unabhängigen Veränderlichen der ersten Ordnung, d. h. von den Parzial-Differenzialgleichungen der ersten Ordnung und deren Integration.

Erste Abtheilung.

Betrachtung einer einzigen Parzial-Differenzialgleichung der ersten Ordnung *).

A. α) Von der Integration einer Parzial-Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen, von denen eine abhängig und zweie unabhängig veränderlich sind.

§. 283. Aufgabe.

Es ist gegeben eine Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen, nämlich zwischen zwei unabhängigen x und y, und einem abhängigen z (als Funktion von x und y), so wie zwischen den Ableitungen ∂z_x, ∂z_y (von z nach x und nach y)

*) Man lese noch einmal die Vorerinnerung zu dem nächstvorhergehenden 12ten Kapitel.

von der 1sten Ordnung: man soll alle Funktionen $z_{x,y}$ finden, welche statt z gesetzt, diese Gleichung identisch machen.

Auflösung. I. Es sey die gegebene Gleichung vorgestellt durch

1) $$F_{x,y,z,z_{1/1}z} = 0,$$

wo z_1 statt ∂z_x und $_1z$ statt ∂z_y geschrieben worden ist.

II. Da nun jede Funktion z von x und y, also auch jede der hier gesuchten Funktionen, in eine nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufende Reihe verwandelt gedacht werden kann; so bezeichne man, ganz so wie in den (§§. 265. 271. 275.)

2) $x-\alpha$ durch $\varkappa$, so daß $x = \alpha+\varkappa$,

also

$$\delta^0 x = \alpha, \quad \delta x = 1, \quad \delta^2 x = \delta^3 x = \text{ꝛc.} = 0$$

wird, sobald man dasselbe x als $\alpha+\varkappa$ in der Form

$$x_\varkappa \quad \text{oder} \quad \delta^0 x + \delta x \cdot \varkappa + \delta^2 x \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 x \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$$

schreiben wollte. Die für z gesuchte Reihe werde ferner durch

3) $z_\varkappa$ oder $\delta^0 z + \delta z \cdot \varkappa + \delta^2 z \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 z \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$

bezeichnet, wo $\delta^0 z$, δz, $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, ꝛc. gesuchte Funktionen von y seyn werden; so daß, weil $\partial(z_\varkappa) = \partial(z_\varkappa)_\varkappa$ ist,

4) $$\partial(z_\varkappa)_x = \delta z + \delta^2 z \cdot \varkappa + \delta^3 z \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

dagegen, weil $\varkappa$ von y unabhängig ist,

5) $$\partial(z_\varkappa)_y = \partial(\delta^0 z)_y + \partial(\delta z)_y \cdot \varkappa + \partial^2(\delta z)_y \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

wird. Die Koeffizienten der Reihe (3.) werden nun der Aufgabe gemäß so gesucht, daß, wenn man diese Reihe (3.) statt z, folglich die Reihe (4.) statt z_1 und die Reihe (5.) statt $_1z$ in die gegebene Gleichung $F_{x,y,z,z_{1/1}z} = 0$ substituirt, diese letztere Gleichung identisch wird. Bezeichnet man nun, um diese Rechnung möglichst bequem durchzuführen, dem (§. 242.) zu Folge, die Reihe (4.) durch

6) $(z_1)_x$ d. h. durch $\delta^0 z_1 + \delta z_1 \cdot x + \delta^2 z_1 \cdot \frac{x_2}{2!} + \delta^3 z_1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

und die Reihe (5.) durch

7) $({}_1z)_x$ d. h. durch $\delta^0 {}_1z + \delta {}_1z \cdot x + \delta^2 {}_1z \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 {}_1z \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$;

so folgt aus der Vergleichung der Reihen (4. und 6.)

8) $$\delta^a z_1 = \delta^{a+1} z,$$

so wie aus der Vergleichung der Reihen (5. und 7.)

9) $$\delta^a {}_1z = \partial(\delta^a z)_y,$$

durch welche Gleichungen (8. und 9.) die Koeffizienten der für z_1 und ${}_1z$ zu setzenden Reihen in die Koeffizienten der gesuchten Reihe (3.) ausgedrückt sind. Setzt man nun diese Reihen statt z, z_1 und ${}_1z$ in $F = 0$, so erhält man

10) $$F_{x_x, y, z_x, (z_1)_x, ({}_1z)_x} = 0.$$

III. In dieser Gleichung (10.) wird der Ausdruck zur Linken wiederum eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe, welche allemal durch

11) F_x oder $\delta^0 F + \delta F \cdot x + \delta^2 F \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 F \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

bezeichnet wird. Die Gleichung (10.) liefert daher nach (§. 254.)

12) $\delta^0 F = 0$, $\delta F = 0$, $\delta^2 F = 0$, $\delta^3 F = 0$ ꝛc.,

und dies sind die Gleichungen, aus denen die unbekannten Koeffizienten $\delta^0 z$, δz, $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, ꝛc. der gesuchten Reihe (3.) gefunden werden müssen.

IV. Es ist aber nach (§. 253.)

13) $$\delta^0 F = F_{x, y, z, z_1, {}_1z},$$

wenn unter x, z, z_1 und ${}_1z$ die ersten Glieder der durch x_x, z_x, $(z_1)_x$ u. $({}_1z)_x$ vorgestellten Reihen, also beziehlich $\delta^0 x$ o. α, $\delta^0 z$, $\delta^0 z_1$ o. δz, $\delta^0 {}_1z$ o. $\partial(\delta^0 z)_y$ verstanden werden; und die Gleichung $\delta^0 F = 0$ liefert daher sogleich δz (ausgedrückt in $\alpha, y, \delta^0 z$, als in einer unbestimmt blei-

benden Funktion von y, und in der Ableitung $\partial(\delta^0 z)_y$ der letzteren nach y).

V. Ferner ist nach (§. 253.)

$$\delta F = \partial F_x \cdot \delta x + \partial F_z \cdot \delta z + \partial F_{z_1} \cdot \delta z_1 + \partial F_{,z} \cdot \delta_{,} z$$

d. h. weil $\delta x = 1$, $\delta z_1 = \delta^2 z$ und $\delta_{,} z = \partial(\delta z)_y$ ist, nach (II. 2. 8. 9.),

14) $$\delta F = \partial F_x + \partial F_z \cdot \delta z + \partial F_{z_1} \cdot \delta^2 z + \partial F_{,z} \cdot \partial(\delta z)_y,$$

wenn man nur überall in ∂F_x, ∂F_z, ∂F_{z_1}, $\partial F_{,z}$ unter $x, z, z_1, {}_{,}z$ beziehlich die ersten Glieder $\delta^0 x$ oder α, $\delta^0 z$, $\delta^0 z_1$ d. h. δz und $\delta^0{}_{,} z$ d. h. $\partial(\delta^0 z)_y$ der durch $x_\varkappa$, $z_\varkappa$, $(z_1)_\varkappa$, $({}_{,}z)_\varkappa$ vorgestellten Reihen sich denkt; so daß die Gleichung $\delta F = 0$ augenblicklich den Koeffizienten $\delta^2 z$ liefert (ausgedrückt in α, y, $\delta^0 z$, $\partial(\delta^0 z)_y$, δz, $\partial(\delta z)_y$).

VI. Hernach findet sich nach (§. 253.)

$$\delta^2 F = \partial F_x \cdot \delta^2 x + \partial F_z \cdot \delta^2 z + \partial F_{z_1} \cdot \delta^2 z_1 + \partial F_{,z} \cdot \delta^2{}_{,} z + \\ + \partial^2 F_x \cdot \delta x^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} F_{x,z} \cdot \delta x \cdot \delta z + \cdots\cdots,$$

wenn nur statt $x, z, z_1, {}_{,}z$ überall α, $\delta^0 z$, $\delta^0 z_1$ oder δz und $\delta^0{}_{,} z$ oder $\partial(\delta^0 z)_y$ gesetzt wird, während (nach II. 8. und 9.) $\delta^2 z_1 = \delta^3 z$ und $\delta^2{}_{,} z = \partial(\delta^2 z)_y$ ist; so daß die Gleichung $\delta^2 F = 0$ ebenfalls sogleich zur Bestimmung von $\delta^3 z$ dient (in α, y, $\delta^0 z$, $\partial(\delta^0 z)_y$, δz, $\partial(\delta z)_y$, $\delta^2 z$, $\partial(\delta^2 z)_y$ ausgedrückt).

VII. Und das Gesetz des (§. 253.), nach welchem die folgenden Koeffizienten $\delta^3 F$, $\delta^4 F$, ꝛc. gebildet werden, in Verbindung mit den Relationen (II. 8. 9.), läßt deutlich erkennen, daß jede folgende der Gleichungen

$$\delta F = 0, \quad \delta^2 F = 0, \quad \delta^3 F = 0, \quad \delta^4 F = 0, \text{ ꝛc.}$$

wirklich auch jeden folgenden der Koeffizienten $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, $\delta^4 z$, $\delta^5 z$, ꝛc. liefert, und zwar jeden folgenden durch die vorhergehenden und ihre Ableitungen (nach y) ausgedrückt; so daß zuletzt alle in $\delta^0 z$ und dessen Ableitungen nach y ausgedrückt sind, während $\delta^0 z$ eine ganz willkührliche Funktion von y bleibt.

VIII. Es ist also die für z gesuchte Reihe

$$(\text{ת}) \cdots \quad z_x \text{ oder } \delta^0 z + \delta z \cdot x + \delta^2 z \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

das gesuchte allgemeine Integral von $F = 0$, welches eine willkührliche Funktion $\delta^0 z$ oder Y von y in sich aufnimmt, übrigens alle Funktionen z von x und y (jedoch in Form einer nach Potenzen von x oder $x - \alpha$ fortlaufenden Reihe) vorstellt, die statt z gesetzt, die gegebene Parzialgleichung $F = 0$ identisch machen; mit Ausnahme jedoch der singulären Werthe, welche auch hier erscheinen können, und welche die Gleichungen $\delta F = 0$, $\delta^2 F = 0$, ꝛc. entweder auf die Form $\frac{0}{0} = 0$ bringen, oder doch identisch machen, so daß diese Gleichungen nicht mehr zur Bestimmung der Koeffizienten δz, $\delta^2 z$, ꝛc. zu benutzen sind *).

Beispiel. Auf diesem Wege erhält man, wenn

$$z - x \cdot z_1 + y \cdot {}_1 z = 0$$

die gegebene $F = 0$ ist, sogleich das allgemeine Integral derselben

$$z = Y + \frac{Y - y \cdot \partial Y}{\alpha} \cdot \frac{x - \alpha}{1} + \frac{y^2 \cdot \partial^2 Y}{\alpha^2} \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \\ + \frac{-3y^2 \partial^2 Y - y^3 \cdot \partial^3 Y}{\alpha^3} \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots,$$

wo Y statt $\delta^0 z$ gesetzt worden ist, und eine ganz willkührliche Funktion von y vorstellt.

Anmerkung. Auch dieses Resultat (ת) hätte man wiederum durch Anwendung der allgemeinern Maclaurin'schen Reihe

$$(\text{ℭ}) \cdots \quad z = [z_x]_\alpha + [\partial z_x]_\alpha \cdot \frac{x - \alpha}{1} + [\partial^2 z_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$$

---

*) Solche Werthe, welche die Gleichungen $\delta F = 0$, $\delta^2 F = 0$, ꝛc. entweder identisch machen, oder auf die Form $\frac{0}{0} = 0$ bringen, müssen aber zu gleicher Zeit auch $F = 0$ identisch machen, und dürfen nicht in dem allgemeinen Integral (ת) (für besondere Formen oder Werthe der willkührlichen Funktion $\delta^0 z$) enthalten seyn, wenn sie auf dem Namen eines singulären Werthes Anspruch machen wollen.

erhalten können, indem man ∂z_x, $\partial^2 z_x$, ꝛc. aus der gegebenen Gleichung $F=0$ und aus ihren Ableitungsgleichungen $\partial F_{(x)}=0$, $\partial^2 F_{(x)}=0$, ꝛc. entwickelte *), wo $[z_x]_\alpha$ selbst unbestimmt blieb, und als eine unbekannte Funktion Y von y angesehen werden müßte. — Man müßte aber dann erweisen, daß die Gleichung $F=0$ wirklich allemal durch die obige Reihe (©) identisch wird, auch wenn man statt $[z_x]_\alpha$ eine ganz beliebige, willkührliche Funktion Y von y setzt. (Vgl. §. 265. Betrachtg.).

§. 284. Zusatz.

Sucht man z in Form einer nach Potenzen von $y-\beta$ fortlaufenden Reihe, und verfährt man übrigens genau nach (§. 283.); so erhält man wieder das allgemeine Integral von $F=0$ in Form folgender Reihe ausgedrückt,

$$(\odot) \qquad z_x \text{ oder } \delta^0 z + \delta z \cdot x + \delta^2 z \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 z \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

wo aber $x = y-\beta$, ferner $\delta^0 z$ eine ganz willkührliche Funktion X von x ist, und wo die Koeffizienten δz, $\delta^2 z$, ꝛc. Zusammensetzungen aus den Koeffizienten der Gleichung $F=0$, aus der willkührlichen Funktion X und deren Ableitungen (nach x) sind, wie solche aus den Gleichungen $\delta^0 F=0$, $\delta F=0$, $\delta^2 F=0$, ꝛc. jetzt eben gefunden werden müssen.

Beispiel. Für dieselbe Gleichung des obigen Beispiels

$$z - x\cdot\partial z_x - y\cdot\partial z_y = 0$$

erhielte man also noch als allgemeines Integral

---

*) Um die $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^{2,1} z_{x,y}$, $\partial^{1,2} z_{x,y}$, $\partial^{1,3} z_{x,y}$, ꝛc., die noch in $\partial F_{(x)}$, $\partial^2 F_{(x)}$, ꝛc. vorkommen, eliminiren zu können, muß man auch die Gleichungen

$$\partial F_{(y)} = 0, \quad \partial^{1,1} F_{x,y} = 0,$$

$$\partial^2 F_{(y)} = 0, \quad \partial^{1,2} F_{(x,y)} = 0,$$

ꝛc. zu Hilfe nehmen, welche mit den zu eliminirenden Ausdrücken genau in gleicher Anzahl vorhanden sind.

$$z = X + \frac{X - x \cdot \partial X}{\beta} \cdot \frac{y-\beta}{1} + \frac{x^2 \cdot \partial^2 X}{\beta^2} \cdot \frac{(y-\beta)^2}{2!} + \\ + \frac{-3x^2 \cdot \partial^2 X - x^3 \cdot \partial^3 X}{\beta^3} \cdot \frac{(y-\beta)^3}{3!} + \cdots,$$

wo X eine ganz willkührliche Funktion von x ist und bleibt.

§. 285. Zusatz.

Man hat also nun ein und dasselbe allgemeine Integral von $F = 0$, einmal in der Form (♂ des §. 283.) nämlich

$$\text{I.} \quad z = Y + Y_1 \cdot \frac{x-\alpha}{1} + Y_2 \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + Y_3 \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots,$$

wo Y_1, Y_2, Y_3, ꝛc. von der willkührlichen Funktion Y (und ihren Ableitungen), so wie von den Koeffizienten von $F = 0$ abhängige Funktionen von y sind; das anderemal in der Form (⊙ des §. 284.), nämlich

$$\text{II.} \quad z = X + X_1 \cdot \frac{y-\beta}{1} + X_2 \cdot \frac{(y-\beta)^2}{2!} + X_3 \cdot \frac{(y-\beta)^3}{3!} + \cdots,$$

wo X_1, X_2, X_3, ꝛc. Funktionen von x sind, welche von der willkührlichen Funktion X und ihren Ableitungen, so wie von den Koeffizienten der Gleichung $F = 0$ auf eine bestimmte Weise abhängen.

Nun kann man sich aber in (I.) alle einzelnen Koeffizienten Y, Y_1, Y_2, ꝛc. nach dem allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatze, wiederum in Reihen verwandelt denken, welche nach Potenzen von $y-\beta$ fortgehen. Die Reihe für die ganz willkührliche Funktion Y wird dann ganz unbestimmte willkührliche Koeffizienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{0,2}$, $A_{0,3}$, ··· erhalten; dagegen werden die Koeffizienten der Reihen für Y_1, Y_2, Y_3, ꝛc. ganz bestimmte Zusammensetzungen aus diesen völlig willkührlichen (jetzt nach x und nach y) konstanten Koeffizienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{0,2}$, ··· und den gegebenen Koeffizienten von $F = 0$ seyn. Dann erscheint dasselbe allgemeine Integral von $F = 0$ noch in dieser dritten Form, nämlich

$$\text{III.} \quad Z = S\left[A_{a,b} \cdot \frac{(x-\alpha)^a}{a!} \cdot \frac{(y-\beta)^b}{b!}\right],$$

$$\text{wo } Y = S\left[A_{0,b} \cdot \frac{(y-\beta)^b}{b!}\right], \quad Y_1 = S\left[A_{1,b} \cdot \frac{(y-\beta)^b}{b!}\right],$$

u. s. w. f. ist, wo die durch $A_{0,b}$ vorgestellten Koeffizienten alle ganz willkührlich konstant, wo dagegen die durch $A_{1,b}$, $A_{2,b}$, ꝛc. vorgestellten Koeffizienten gegebene Zusammensetzungen aus den ersteren (nämlich aus $A_{0,b}$) sind.

Verwandelt man dagegen in der Form (II.) alle Koeffizienten X, X_1, X_2, X_3, ꝛc. in Reihen, die nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufen; so erhält man dieselbe Form (III.) wieder, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt die Koeffizienten $A_{a,0}$ ganz willkührlich bleiben (die der willkührlichen Funktion X von x ihr Entstehen verdanken), dagegen die übrigen Koeffizienten $A_{a,1}$, $A_{a,2}$, ꝛc. von den ersteren $A_{a,0}$ auf eine bestimmte Weise abhängig sind, weil jetzt

$$X = S\left[A_{a,0} \cdot \frac{(x-\alpha)^a}{a!}\right], \quad X_1 = S\left[A_{a,1} \cdot \frac{(x-\alpha)^a}{a!}\right],$$

u. s. w. f. ist.

Anmerkung. Man kann auch von der Form (III.) zu jeder der beiden Formen (I. oder II.) zurück kehren, in so fern man die Doppelreihe (III.) augenblicklich in der Form einer einfachen Reihe schreiben kann, deren Koeffizienten selber wieder unendliche Reihen sind, und in eine endliche Form zusammengefaßt werden können *).

Aus demselben Grunde kann man auch von der Form (I.) zu der Form (II.) übergehen, in so fern man aus (I.) zuerst die

---

*) Und sind in einer Reihe

$$A_{0,0} + A_{1,0} \cdot \frac{x-\alpha}{1} + A_{2,0} \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + A_{3,0} \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots,$$

die Koeffizienten $A_{0,0}$, $A_{1,0}$, $A_{2,0}$, ꝛc. ganz willkührlich und von einander und von andern ganz unabhängig; so kann man statt dieser Reihe eine ganz beliebige unbestimmte willkührliche Funktion von x setzen, und durch X bezeichnen. Poisson hat diese an sich so höchst einfache Bemerkung bei einem speziellen Beispiele der 2ten Ordnung schon früher gemacht. (S. **La croix Traité T. II. pag. 642.**).

Form (III.) bildet, um von dieser zu der Form (II.) übergehen zu können. — Ganz so kann man dann auch von der Form (II.) zu der Form (I.) gelangen.

Man kann endlich die Reihe (III.) auch direkt finden, indem man sie mit unbestimmten Koeffizienten annimmt, sie statt z, so wie ihre Ableitungen nach x und nach y statt z_1 und $_1z$ in die gegebene Gleichung $F = 0$ substituirt, und nun die Koeffizienten von $(x-\alpha)^a$, $(y-\beta)^b$ in $F = 0$ einzeln, d. h. für jeden Werth von a und b der Null gleich setzt, um aus diesen letztern Gleichungen die Bestimmung der unbestimmten Koeffizienten zu erlangen.

§. 286. Zusatz.

I. Ist das allgemeine Integral von $F = 0$ in endlicher Form herzustellen; so muß solches, damit es in jede der beiden Reihen (I. und II. des §. 285.) umgeformt werden könne, entweder eine willkührliche Funktion von x und zugleich auch eine willkührliche Funktion von y, oder es muß eine willkührliche Funktion von x und y zugleich, enthalten. — Wäre das allgemeine Integral von

$$F_{x,y,z,z_1,{}_1z} = 0$$

von der erstern Form, nämlich

$$W_{x,y,z,X,Y} = 0,$$

wo X eine willkührliche Funktion von x, und Y eine willkührliche Funktion von y ist; so müßte man aus

$$W = 0, \quad \partial W_{(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \partial W_{(y)} = 0$$

zur Gleichung $F = 0$ gelangen können, indem man X und Y eliminirt, was deshalb nicht möglich ist, weil in $\partial W_{(x)}$ auch noch das unbestimmte ∂X_x, und in $\partial W_{(y)}$ auch noch das unbestimmte ∂Y_y vorkommt, welche nicht mit den unbestimmten X und Y zugleich wegfallen können. Also muß das allgemeine Integral von $F = 0$, in endlicher Form ausgedrückt, eine willkührliche Funktion ψ von x und y in sich aufnehmen, demnach von der Form

$$W_{x,y,\psi,z} = 0$$

seyn, während ψ nicht so ganz willkührlich seyn kann, weil $W = 0$ der Gleichung $F = 0$ zu genügen hat *).

Dabei muß aber in ψ auch noch z zugelassen werden, weil das Vorhergegangene durchaus nicht sagt, daß ψ eine explizite (unmittelbare) Funktion von x und y seyn müsse; so daß dieses ψ recht gut x und y auch implizite enthalten kann.

II. Die Funktion ψ in dem allgemeinen Integral

1) $$W_{x,y,\psi,z} = 0$$

muß aber die Eigenschaft haben, daß wenn man aus diesem $W = 0$ und ihren beiden Ableitungen

2) $\partial W_{(x)} = 0$ d. h. $\partial W_x + \partial W_\psi \cdot \partial \psi_{(x)} + \partial W_z \cdot \partial z_x = 0$,

3) $\partial W_{(y)} = 0$ d. h. $\partial W_y + \partial W_\psi \cdot \partial \psi_{(y)} + \partial W_z \cdot \partial z_y = 0$,

sowohl ψ, als auch jeden mit ψ zugleich unbestimmten Ausdruck (d. h. $\partial \psi_{(x)}$, $\partial \psi_{(y)}$) eliminirt, dann $F = 0$ sich ergiebt, was so lange unmöglich ist, als nicht die mit ψ zugleich unbestimmten $\partial \psi_{(x)}$, $\partial \psi_{(y)}$ einen einzigen (gemeinschaftlichen) unbestimmten Faktor haben, während die zweiten Faktoren bestimmt und gegeben sind. — Also kann ψ nur eine willkührliche Funktion eines einzigen Veränderlichen ω seyn, während ω eine bestimmte und jedenfalls auszumittelnde Funktion von x, y und z ist, weil dann

4) $\partial \psi_{(x)} = \partial \psi_\omega \cdot \partial \omega_{(x)}$ und 5) $\partial \psi_{(y)} = \partial \psi_\omega \cdot \partial \omega_{(y)}$

wird, wo $\partial \omega_{(x)}$, $\partial \omega_{(y)}$ bekannte Ausdrücke in x, y, z, ∂z_x und ∂z_y sind, und nur allein $\partial \psi_\omega$ mit ψ_ω zugleich gänzlich unbestimmt bleibt. Da nämlich nun in den Gleichungen (1.—3.)

---

*) Fände man aus $W = 0$, $z = f_{x,y,\psi}$, so könnte man allemal ψ so bestimmen, daß die Gleichung

$$f_{x,y,\psi} = \pi_{x,y}$$

identisch wird, während π irgend eine bestimmte Funktion nach x und y vorstellt. Wenn also $z = \pi_{x,y}$ irgend eine der Funktionen ist, welche der Gleichung $F = 0$ nicht genügen; so wird für den so eben gefundenen Werth von ψ auch $z = f_{x,y,\psi}$, weil sie nun gerade $z = \pi_{x,y}$ ist, der Gleichung $F = 0$ nicht genügen.

nur zwei unbestimmte Funktionen, nämlich ψ_ω und $\partial\psi_\omega$ vorkommen; so lassen sich wirklich beide eliminiren, so daß man zu einer Gleichung bloß zwischen x, y, z, ∂z_x, ∂z_y gelangt, welche nun die gegebene Parzialgleichung $F = 0$ werden muß.

Beispiel. 1. Der Parzialgleichung

1) $$x \cdot \partial z_x - z = 0$$

genügt

2) $$z = x \cdot \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{yz}{x} \text{ ist,}$$

und wo φ_ω eine ganz willkührliche Funktion von ω vorstellt. Denn man findet daraus

3) $$\partial z_x = \varphi_\omega + \partial\varphi_\omega \cdot \frac{xy \cdot \partial z_x - yz}{x}$$

4) $$\partial z_y = \partial\varphi_\omega \cdot (y \cdot \partial z_y + z);$$

und eliminirt man nun aus (2.—4.) sowohl φ_ω als $\partial\varphi_\omega$, so kommt die Parzialgleichung (1.) heraus. Oder besser, findet man aus (2.—4.) sowohl z als auch ∂z und ∂z_y, nämlich

5) $z = x \cdot \varphi$, 6) $\partial z_x = \frac{\varphi - y \cdot \varphi \cdot \partial\varphi}{1 - y \cdot \partial\varphi}$, 7) $\partial z_y = \frac{x \cdot \varphi \cdot \partial\varphi}{1 - y \cdot \partial\varphi}$,

und setzt man diese Werthe in die Gleichung (1.), so wird solche identisch $0 = 0$ *).

---

*) Das allgemeine Integral (2) kann man auch, wenn $\frac{z}{x} = u$ gesetzt wird, so schreiben:

$$u = \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = y \cdot u.$$

Diese Gleichung, da sie bloß zwischen y und u statt findet, giebt aber offenbar

$$u = \psi_y \quad \text{oder} \quad \frac{z}{x} = \psi_y \quad \text{oder} \quad z = x \cdot \psi_y,$$

wo ψ_y eine willkührliche Funktion von y allein ist. Das allgemeine Integral von $x \cdot \partial z_x - z = 0$ kann daher auch in der Form

$$z = x \cdot \psi_y$$

geschrieben werden. — In der That gehört diese Gleichung

$$x \cdot \partial z_x - z = 0$$

Beispiel 2. Der Parzialgleichung

1) $$z - x \cdot \partial z_x - 2y \cdot \partial z_y = 0$$

genügt

2) $$z^2 = y \cdot \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{xz}{y},$$

und wo φ_ω eine willkührliche Funktion von ω bedeutet. Denn die Ableitungsgleichungen sind folgende:

3) $$2z \cdot \partial z_x = \partial\varphi_\omega \cdot (x \cdot \partial z_x + z),$$

4) $$2z \cdot \partial z_y = \varphi_\omega + \partial\varphi_\omega \cdot \frac{xy \cdot \partial z_y - xz}{y},$$

und die Gleichung (1.) wird wirklich identisch, wenn man aus (2.—4.) sowohl z, als ∂z_x und ∂z_y (in x, y, φ_ω und $\partial\varphi_\omega$ ausgedrückt) findet, und diese Werthe in (1.) substituirt. *)

Beispiel 3. Der Parzialgleichung

1) $$z + (x+z) \cdot \partial z_y - x \cdot \partial z_x = 0$$

kommt zu das allgemeine Integral

2) $$z = \frac{x(x+y) \cdot \varphi_\omega}{1 - x \cdot \varphi_\omega}, \quad \text{wo} \quad \omega = x + y + z \text{ ist } **).$$

---

zu denen des vorhergehenden Kapitels, weil sie nicht ∂z_y enthält. Jene Methode (§§. 265. 266.) giebt aber $y = C \cdot x$, wo C ganz willkührlich ist, also auch jede Funktion von y vorstellt.

*) Setzt man $\frac{z^2}{y} = u$, so läßt sich das allgemeine Integral (2.) auch

$$u = \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{u},$$

schreiben. Weil aber nun diese Gleichung bloß u und $\frac{x}{\sqrt{y}}$ enthält, so giebt sie u als eine willkührliche Funktion von $\frac{x}{\sqrt{y}}$, so daß

$$z^2 = y \cdot \psi_{\omega'}, \quad \text{wo} \quad \omega' = \frac{x}{\sqrt{y}},$$

ebenfalls das allgemeine Integral der Parzialgleichung (1.) ist, in einer andern Form.

**) Bei diesem Beispiel ist es nicht möglich, das allgemeine Integral so umzuformen, (wie wir dies in den beiden vorhergehenden Bei-

Beispiel 4. Der Parzialgleichung

1) $z - x \cdot \partial z_x + 2y \cdot \partial z_y = 0$

kommt das allgemeine Integral

2) $z = x\varphi_\omega$ wo $\omega = x \cdot y \cdot z$ ist,

zu, welche Form sich auch in diese andere Form

3) $z = x \cdot \psi_\omega$ wo $\omega = x^2 y$ ist,

verwandeln läßt.

Beispiel 5. Der Parzialgleichung

1) $z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y = 0$

kommt das allgemeine Integral

2) $z = y \cdot \varphi_\omega$ wo $\omega = \frac{x}{y}$ ist,

zu, welches Integral sich nicht so umformen läßt, daß eine willkührliche Funktion von ω' einginge, während ω' außer x und y auch noch z enthielte, und das Integral selbst eine endliche Form behalten soll.

Beispiel 6. Der Parzialgleichung

1) $(x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y)(y + \partial z_x) + [(xy + z) \cdot \partial z_x - y^2 \cdot \partial z_y + yz]^2 = 0$

kommt das allgemeine Integral

2) $z = \psi_\omega + y\psi_\omega^2$, wo $\omega = xy + z$ ist,

zu, und man kann keine Gleichung zwischen x, y, z und einer willkührlichen Funktion ψ_ω in endlicher Form angeben, welche dieses allgemeine Integral ersetzte, und in welcher ω kein z enthielte.

Beispiel 7. Der Parzialgleichung

1) $-4x^4 \cdot (2z - x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y) + y^2 \cdot (2z + x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y)^2 = 0$

kommt das allgemeine Integral

---

spielen gethan haben), daß solches eine willkührliche Funktion von ω, dagegen ω bloß x und y außerhalb d. h. kein z enthielte. — Wohl aber läßt sich diesem Integral (2.) die Form

$$\varphi_\omega = \frac{z}{(x+y+z) \cdot x} \quad \text{oder} \quad \omega \cdot \varphi_\omega = \frac{z}{x} \quad \text{oder} \quad z = x \cdot \psi_\omega$$

geben, so lange unter ω noch die Summe $x+y+z$ verstanden, und ψ_ω als eine willkührliche Funktion von ω gedacht wird.

2) $z = x^2 \cdot \psi_\omega + y^2 \cdot \psi_\omega^2$, wo $\omega = xy$ ist,

zu, und es giebt keine Gleichung in endlicher Form zwischen x, y, z und einer willkührlichen Funktion ψ_ω, welche dieses allgemeine Integral ersetzte und, in welchem ω auch noch z in sich aufgenommen hätte.

III. Diese Beispiele zeigen aber hinreichend, daß das zu einer Parzialgleichung der ersten Ordnung gehörige allgemeine Integral zuweilen zwei endliche Formen annehmen kann, jede mit einer willkührlichen Funktion von ω, während ω in der einen Form zugleich x, y und z, in der andern Form dagegen bloß x und y ohne z in sich aufnimmt; daß aber auch ein solches Integral oft nur die erstern dieser endlichen Formen allein, oft auch nur die andere dieser endlichen Formen allein haben wird, ohne zu gleicher Zeit die zweite Form annehmen zu können.

Indeß, weil diejenige Form, in welcher ω eine Funktion von x, y und z vorstellt, die allgemeinere ist, und die andere, wo z in ω nicht vorkommt, als einen besondern Fall in sich schließt; so werden wir in der Folge ein solches allgemeines Integral in endlicher Form, durch

$$W_{x,y,z,\psi} = 0$$

vorstellen, dabei unter ψ allemal eine willkührliche Funktion von ω, unter ω dagegen eine bestimmte Funktion von x, y und z uns denken, aus welcher letztern jedoch in besondern Fällen das z auch wieder herausfallen kann *).

IV. Aus dem allgemeinen Integral

$$W_{x,y,z,\psi} = 0$$

gehen aber alle besondern Integrale hervor, wenn man statt

---

*) Enthielte ω bloß x allein, so wäre ψ_ω bloß eine willkührliche Funktion von x allein, und dies kann offenbar nur dann der Fall seyn, wenn die gegebene Parzialgleichung bloß ∂z_y aber nicht bloß ∂z_x enthält, also genau genommen nur dann, wenn sie eine der im nächstvorhergehendem Kapitel behandelten gewöhnlichen Differenzialgleichungen, mithin eigentlich keine Parzialgleichung ist. Aehnliches gilt für den Fall, wo ω bloß y allein enthielt. (Vgl. das 1ste Beisp.)

ψ_ω irgend bestimmte Funktionen (z. B. $a\cdot\omega^0$ d. h. a, $a\cdot\omega$, $\frac{b}{\omega}$, $1\pm\omega$, $\omega\pm\frac{1}{\omega}$, $a\cdot\omega^2+\frac{b}{\omega}$, e^ω, *log.* ω, $e^\omega\cdot\omega^2$ ꝛc.) schreibt.

Hat man z. B. zu der Parzialgleichung

1) $z+(x+z)\cdot\partial z_y-x\cdot\partial z_x=0$,

das allgemeine Integral

2) $z=x\cdot\varphi_\omega$, wo $\omega=x+y+z$ ist,

gefunden, so hat man als besondere Integrale derselben Parzialgleichung (1.) sogleich

3) $z=ax$, 4) $z=ax\cdot(x+y+z)$ d. h. $z=\frac{ax\cdot(x+y)}{1-a\cdot x}$,

5) $z=\frac{bx}{x+y+z}$ oder $z^2+(x+y)\cdot z-bx=0$,

6) $z=x-x(x+y+z)$ oder $z=\frac{x\cdot[1-(x+y)]}{1+x}$,

7) $z=x\cdot(x+y+z)+\frac{x}{x+y+z}$,

8) $z=a\cdot x+b\cdot x\cdot(x+y+z)$ oder $z=\frac{a\cdot x+b\cdot x\cdot(x+y)}{1-bx}$,

9) $z=ax\cdot(x+y+z)^2+\frac{bx}{x+y+z}$,

10) $z=x\cdot e^x\cdot e^y\cdot e^z$, oder $log.\,z-z=x+y+log.\,x$,

11) $z=x\cdot log.(x+y+z)$,

u. s. w. in's Unendliche fort.

Gerade so finden sich aus dem allgemeinen Integral

1) $z=x\cdot\varphi_\omega$, wo $\omega=\frac{y}{x}$ ist,

welches der Parzialgleichung

2) $z-x\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y=0$

zukommt, die besonderen Integrale

$z=a\cdot x$, $z=a\cdot y$, $z=a\cdot x+b\cdot y$, $z=a\cdot x+b\cdot y+c\cdot x\cdot Sin.\frac{y}{x}$,

$z=x\cdot(log.\,y-log.\,x)$, u. s. w. bis in's Unendliche fort.

Jedes dieser besondern Integrale hat aber mit dem allgemeinen Integral die Eigenschaft gemein, daß, wenn man aus ihm und seinen beiden Ableitungen nach x und nach y, sowohl z als auch ∂z_x und ∂z_y findet, und diese Werthe in die gegebene Parzialgleichung substituirt, letztere identisch wird.

V. Aber eben weil in dem allgemeinen Integral

$$W_{x,y,z,\psi} = 0,$$

das Zeichen ψ jede willkührliche Funktion von ω vorstellt, so bleibt das Integral noch eben so allgemein (d. h. es wird nicht mehr und nicht weniger allgemein),

1) wenn man statt ω jede bestimmte Funktion des zuerst für ω gegebenen oder gefundenen Ausdrucks $\omega_{x,y,z}$, und auch

2) wenn man statt ψ irgend eine Funktion von ψ und ω schreibt.

So ist also das allgemeine Integral

1) $$z = x \cdot \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{y}{x} \text{ ist,}$$

und welches der Parzialgleichung

2) $$z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y = 0$$

zukommt, noch eben so allgemein, wenn man statt dessen lieber

3) $$z = x \cdot \frac{y}{x} \cdot \psi_\omega = y \cdot \psi_\omega$$

oder

4) $$z = x \cdot (\varphi_\omega + \frac{y}{x} \cdot \psi_\omega) = x \cdot \varphi_\omega + y \cdot \psi_\omega$$

oder

5) $$z = \frac{x^2}{y} \cdot \psi \text{ , ꝛc. ꝛc. schreibt,}$$

während man zu gleicher Zeit überall unter ω entweder

$\frac{y}{x}$ oder $\frac{\alpha y}{x}$ oder $\frac{\alpha x}{y}$ oder $\frac{x}{y}$ oder $\left(\frac{x}{y}\right)^\beta$ oder $Cos. \frac{x}{y}$

oder $a + b \cdot \frac{x}{y}$ oder $\sqrt{\frac{x}{y}}$ oder $e^{x:y}$ oder $log. x - log. y$

sich denkt.

§. 287. Zusatz.

I. Hat man das zu einer Parzialgleichung

1) $$F_{x,y,z,z_1,z} = 0$$

gehörige allgemeine Integral

2) $$W_{x,y,z,\psi} = 0,$$

wo ψ eine willkührliche Funktion von ω vorstellt, bereits der Form nach gefunden; so bleibt oft noch übrig „die bestimmte Funktion ω von x, y und z dazu zu suchen."

Weil aber auch ψ selbst $= \omega$ genommen werden kann und die entstehende Gleichung

3) $$W_{x,y,z,\omega} = 0$$

der gegebenen Parzialgleichung (1.) noch immer genügen muß; so darf man nur aus dieser Gleichung (3.) und ihren beiden Ableitungen

4) $\partial W_{(x)} = 0$

d. h. $\partial W_x + \partial W_z \cdot \partial z_x + \partial W_\omega \cdot (\partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot \partial z_x)$*) $= 0$

und

5) $\partial W_{(y)} = 0$

d. h. $\partial W_y + \partial W_z \cdot \partial z_y + \partial W_\omega \cdot (\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot \partial z_y) = 0$

in Verbindung mit der Gleichung (1.) sowohl ω als auch ∂z ∂z_y eliminiren, um die Gleichung zur Bestimmung von ω zu erhalten.

Diese Gleichung in ω muß identisch werden, wenn ω (nach x, y und z) konstant gedacht wird**), also muß sie lauter Glie-

---

*) Der Anfänger möge nicht übersehen, daß die Zeichen $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$, $\partial\omega_z$ die Ableitungen bedeuten von ω nach x, nach y und nach z, so nämlich, wie sie sich ergeben, wenn x, y, z als von einander ganz unabhängig gedacht werden, d. h. wie wenn ω als eine Funktion dreier von einander ganz unabhängiger Variablen angesehen wird.

*) Sie muß nämlich identisch werden, wenn ψ_ω statt ω gesetzt wird, während ψ auch die Funktion ω^0 vorstellen, d. h. völlig konstant seyn kann.

der enthalten, welche $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$, $\partial\omega_z$ oder Potenzen oder Produkte dieser Ableitungen zu Faktoren haben. Ordnet man nun diese Gleichung für ω, im Falle sie $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$, $\partial\omega_z$ in höhern Dimensionen aufweisen sollte, nach diesen Dimensionen, so daß sie zu gleicher Zeit auf Null gebracht ist; so muß die Summe der Glieder, welche zu einer und derselben Dimension gehören, für sich der Null gleich seyn, weil die Gleichung für ω dasselbe geben muß, auch wenn φ_ω statt ω gesetzt wird, und weil dann alle einzelnen Glieder, welche zu einer und derselben rten Dimension von $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$, $\partial\omega_z$ gehören, mit $(\partial\varphi_\omega)^r$, also die Glieder von verschiedenen Dimensionen, mit verschiedenen Potenzen von $\partial\varphi_\omega$ multiplicirt erscheinen, so daß, weil $\partial\varphi_\omega$ ganz willkührlich ist, mit φ_ω zugleich die Koeffizienten dieser einzelnen Potenzen von $\partial\varphi_\omega$ einzeln der Null gleich werden müssen.

Das praktische Verfahren hinsichtlich dieser Gleichung, welche zur Bestimmung von ω dient, wird daher folgendes seyn:

1) Man ordnet ihre Glieder nach den verschiedenen Dimensionen von $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$, $\partial\omega_z$, so daß immer die Glieder vereinigt werden, welche zu einer und derselben Dimension gehören;

2) Man setzt die Summen der Glieder, welche zu einer und derselben Dimension von $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$, $\partial\omega_z$ gehören, einzeln der Null gleich;

3) Man sucht einen Werth von ω (in x, y und z ausgedrückt), welcher diesen einzelnen Gleichungen zu gleicher Zeit genügt, oder

4) welcher der Gleichung genügt, die von der niedrigsten Dimension ist, und sieht zu, ob derselbe auch den übrigen Gleichungen der höhern Dimensionen genügt. — Ist dabei die Gleichung der niedrigsten Dimension von der ersten Dimension, so hat sie allemal die Form

$$(\odot) \cdots \quad M\cdot\partial\omega_x + N\cdot\partial\omega_y + P\cdot\partial\omega_z = 0,$$

wo M, N, P Funktionen von x, y, z vorstellen. Ist dieselbe aber von einer höhern Dimension, so läßt sie sich immer in mehrer solche Faktoren von derselben Form $(\odot)$ zerlegen, und ω

kann dann mehrere verschiedene Werthe haben. In jedem Falle hat man aber nur immer Gleichungen von der Form (⊙) zu genügen, und es ist dabei gar nicht nöthig, daß man ein allgemeines Integral dieser Gleichung (⊙) finde*).

Beispiel 1. Hat man von der Parzialgleichung

1) $(yz+(xy+z)\cdot\partial z_x-y^2\cdot\partial z_y)^2+(x\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y)\cdot(y+\partial z_x)=0$

die Form des allgemeinen Integrals

2) $$z=\psi_\omega+y\cdot\psi_\omega^2$$

bereits gefunden; so erhält man, nach der obigen Vorschrift verfahrend, die Gleichung zur Bestimmung von ω

3) $\left((1+2yz)\cdot\frac{-1+\sqrt{1+4yz}}{2y}-z\right)\cdot(\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_z)+$

$+\sqrt{1+4yz}\cdot(x\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_y)+\sqrt{1+4yz}\cdot\Big(z^2(\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_z)^2+$

$+y^2\cdot(x\cdot\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_y)^2+(1+2yz)(\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_z)(x\cdot\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_y)\Big)=0$

welche in zwei Gleichungen zerfällt, nämlich die Summe der Glieder der ersten Dimension $=0$, und die Summe der Glieder der zweiten Dimension (in Bezug auf $\partial\omega_x, \partial\omega_y, \partial\omega_z$) $=0$. Diese Gleichung (3.) wird daher durch die beiden Gleichungen

4) $\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_z=0$ und 4) $x\cdot\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_y=0$

identisch; und Versuche geben nun $\omega=xy+z$, so daß das allgemeine Integral der (1.)

6) $$z=\psi_\omega+y\cdot\psi_\omega^2, \quad \text{wo} \quad \omega=xy+z,$$

gefunden ist.

Beispiel 2. Weiß man, daß von der Parzialgleichung

1) $$yz+(z^2+x^2)\cdot\partial z_y-xy\cdot\partial z_x=0,$$

die Form des allgemeinen Integrals

---

*) Ist aber $u_{x,y,z}$ ein solcher der Gleichung (⊙) genügender Werth von ω, so ist

$$\omega=\psi_{u'}$$

wo ψ_u eine völlig willkührliche Funktion von u bedeutet, das allgemeine Integral der Gleichung (⊙).

2) $$z = x \cdot \varphi_\omega$$

ist; so erhält man aus

α) $$z = x \cdot \omega$$

β) $$\partial z_x = \omega + x \cdot (\partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot \partial z_x)$$

γ) $$\partial z_y = x \cdot (\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot \partial z_y)$$

und aus der (1.), wenn ω und ∂z_x, ∂z_y eliminirt werden, die Gleichung

3) $$-yz \cdot \partial \omega_z + (z^2 + x^2) \cdot \partial \omega_y - xy \cdot \partial \omega_x = 0$$

oder

$$z \cdot (-y \cdot \partial \omega_z + z \cdot \partial \omega_y) + x \cdot (x \cdot \partial \omega_y - y \cdot \partial \omega_x) = 0.$$

Versuche, welche jeden dieser beiden Theile für sich als Null ansehen, führen bald zu dem Werth

$$\omega = x^2 + y^2 + z^2, *)$$

so daß nun

4) $z = x \cdot \varphi_{\omega'}$ wo $\omega = x^2 + {}^2y + z^2$ ist,

als das allgemeine Integral der Gleichung (1.) angesehen werden muß.

Beispiel 3. Wüßte man, daß von der Parzialgleichung

1) $$4y^2 \cdot (z + 2x \cdot \partial z_x - 2y \cdot \partial z_y)^2 - z \cdot \partial z_x^2 = 0$$

die Form des allgemeinen Integrals

2) $$z^2 = y \cdot \varphi$$

ist, so daß ω noch gesucht würde; so erhielte man aus

α) $$z^2 = y \cdot \omega,$$

β) $$2z \cdot \partial z_x = y \cdot (\partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot \partial z_x),$$

γ) $$2z \cdot \partial z_y = \omega + y(\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot \partial z_y),$$

und aus der (1.), wenn man ω, ∂z_x und ∂z_y eliminirt, die Gleichung

---

*) Später (im nächsten VI. Th. d. S.) wird gezeigt werden, wie man aus Gleichnngen von der Form

$$M \cdot \partial \omega_x + N \partial \omega_y + P \cdot \partial \omega_z = 0$$

wo M, N, P bloß x, y und z aber nicht ω enthalten, diese Funktion $\omega_{x,y,z}$ systematisch sicher finden kann. Doch bleibt dann auch immer sehr zu beachten, daß man hier nur einen genügenden Werth von ω braucht.

3) $4y^2 \cdot (-z \cdot \partial\omega_z + 2x \cdot \partial\omega_x - 2y \cdot \partial\omega_y)^2 - z \cdot \partial\omega_x = 0,$

welche sogleich in die beiden

4) $2y \cdot (-z\partial\omega_z + 2x \cdot \partial\omega_x - 2y \cdot \partial\omega_y) - \sqrt{z} \cdot \partial\omega_x = 0$

oder $4y \cdot (x \cdot \partial\omega_y - y \cdot \partial\omega_y) - \sqrt{z} \cdot (\partial\omega_x + 2y\sqrt{z} \cdot \partial\omega_z) = 0$

und

5) $2y \cdot (-z \cdot \partial\omega_z + 2x \cdot \partial\omega_x - 2y \cdot \partial\omega_y) + \sqrt{z} \cdot \partial\omega_x = 0$

oder $4y \cdot (x \cdot \partial\omega_x - y \cdot \partial\omega_y) + \sqrt{z} \cdot (\partial\omega_x - 2y \cdot \sqrt{z} \cdot \partial\omega_z) = 0$

zerfällt. Durch Versuche findet man aber bald, daß der Gleichung (4.) der Werth $\omega = xy - \sqrt{z}$, der (5.) dagegen $\omega = xy + \sqrt{z}$ genügt, so daß das allgemeine Integral der Parzialgleichung (1.) durch

6) $z^2 = y \cdot \varphi_\omega$, wo $\begin{cases} \omega = xy - \sqrt{z} \\ \text{oder } \omega = xy + \sqrt{z} \end{cases}$ ist,

ausgedrückt sich findet.

II. Läßt sich die Gleichung

$$(\odot) \cdots \quad M \cdot \partial\omega_x + N \cdot \partial\omega_y + P \cdot \partial\omega_z = 0,$$

welche zur Bestimmung von ω gefunden worden ist (durch Multiplikation oder Division mit einem Ausdruck, der z, auch vielleicht noch x und y enthält) so umformen, daß M und N gar nicht mehr z enthalten; so kann man ihr am bequemsten dadurch genügen, daß man $\partial\omega_z = 0$ setzt, d. h. daß man ω als bloße Funktion von x und y voraussetzt, gegeben durch die Gleichung

$$(\mathbb{C}) \quad M \cdot \partial\omega_z + N \cdot \partial\omega_y = 0,$$

wo M und N bloß x und y aber kein z enthalten. Nur muß man nachsehen, ob sich diese Annahme auch mit den übrigen einzelnen Gleichungen verträgt, in welche die allgemeine Gleichung für ω sich zerlegt haben kann, ehe man diesen besondern Fall als jetzt wirklich vorhanden ansehen darf.

Und vermuthet man im Voraus schon, daß ω kein z enthält, so erhält man die Gleichung ($\mathbb{C}$) direkt, wenn man aus der gegebenen Parzialgleichung

$$F_{x,y,z,z_{1,1}z} = 0,$$

dann aus der Form

α) $$W_{x,y,z,\omega} = 0$$

und deren beiden Ableitungen, welche jetzt bloß

β) $$\partial W_x + \partial W_z \cdot \partial z_x + \partial W_\omega \cdot \partial \omega_x = 0$$

und

γ) $$\partial W_y + \partial W_z \cdot \partial z_y + \partial W_\omega \cdot \partial \omega_y = 0$$

seyn werden, ω, ∂z_x und ∂z_y eliminirt, wo dann die z von selber herausfallen müssen; fallen aber die z nicht von selbst heraus, so ist die Voraussetzung, daß ω kein z enthalte, nicht zulässig, und man muß dieses letztere Verfahren unterlassen und zu dem ersteren zurückkehren.

Beispiel 1. Hätte man für die Parzialgleichung

1) $$2z + 3x \cdot \partial z_x - 4y \cdot \partial z_y = 0$$

die Form des allgemeinen Integrals

2) $$z^2 = y \cdot \varphi_\omega$$

bereits gefunden; so fände sich zur Bestimmung von ω, indem man aus (1.) und aus

α) $$z^2 = y \cdot \omega,$$

β) $$2z \cdot \partial z_x = y \cdot (\partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot \partial z_x),$$

γ) $$2z \cdot \partial z_y = \omega + y \cdot (\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot \partial z_y),$$

sowohl ω als auch ∂z_x und ∂z_y eliminirt, die Gleichung

3) $$-2z \cdot \partial \omega_z + 3x \cdot \partial \omega_x - 4y \cdot \partial \omega_y = 0$$

oder $$-2(z \cdot \partial \omega_z - y \cdot \partial \omega_y) + 3(x \cdot \partial \omega_x - 2y \cdot \partial \omega_y) = 0.$$

Setzt man nun $\partial \omega_z = 0$, so daß sich (3) auf

4) $$3x \cdot \partial \omega_x - 4y \cdot \partial \omega_y = 0$$

reduzirt, so findet sich leicht

$$\omega = x^4 \cdot y^3.$$

Außerdem aber findet sich noch auf ähnlichen Wegen, wie sie in den Beispielen (I. 1. u. 3.) versucht worden sind,

$$\omega = x^2 yz.$$

Es hat daher das allgemeine Integral diesmal die doppelte Form

I. $$z^3 = y \cdot \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = x^4 y^3$$

und

II. $z^2 = y \cdot \psi_\omega$, wo $\omega = x^2yz$. *)

Beispiel 2. Man habe zur Parzialgleichung

1) $4x^4 \cdot (2z - x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y) - y^2 \cdot (2z + x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y)^2 = 0$

bereits die Form des allgemeinen Integrals

2) $z - x^2 \cdot \varphi_\omega - y^2 \cdot \varphi_\omega^2 = 0$

gefunden, und ω werde noch dazu gesucht.

Weil hier die Rechnungen ziemlich verwickelt werden, so mag man hier zuerst versuchen, ob nicht ω bloß x und y allein enthält. Man wird also aus

$\alpha)$ $z - x^2 \cdot \omega - y^2 \cdot \omega^2 = 0$,

$\beta)$ $\partial z_x - 2x \cdot \omega - (x^2 + 2y^2\omega) \cdot \partial \omega_x = 0$,

$\gamma)$ $\partial z_y - 2y \cdot \omega^2 - (x^2 + 2y^2\omega) \cdot \partial \omega_y = 0$,

so wie noch aus der (1.), sowohl ω als auch ∂z_x, ∂z_y eliminiren, und nach gehöriger Reduktion wird man die Gleichung

3) $x \cdot \partial \omega_x - y \cdot \partial \omega_y = 0$

erhalten, welche in der That kein z mehr enthält, welche also die gemachte Voraussetzung rechtfertigt, und leicht $\omega = xy$ finden läßt (zunächst immer durch Versuche).

Das allgemeine Integral der Gleichung (1.) ist daher

$z - x^2 \varphi_\omega - y^2 \cdot \varphi_\omega^2 = 0$, wo $\omega = xy$ ist.

Beispiel 3. Wollte man aber auf die Parzialgleichungen

1) $z + (x + z) \cdot \partial z_y - x \cdot \partial z_x = 0$

oder

2) $(x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y)(y + \partial z_x) + [(xy + z)\partial z_x - y^2 \cdot \partial z_y + yz]^2 = 0$,

für welche die Formen ihres allgemeinen Integrals beziehlich

3) $z = x \cdot \psi_\omega$ und 4) $z = \psi_\omega + y \cdot \psi_\omega^2$

---

*) Setzt man aber in (II.) $\frac{z^2}{y} = u$, also $z = \sqrt{yu}$; so geht solches Integral über in $u = \psi_\omega$, wo $\omega = x^2 y^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{u}$ ist, d. h. in eine Gleichung über, zwischen u und $x^2 y^{\frac{3}{2}}$. Daher giebt sie $u = \varphi_\omega$, wo $\omega = x^2 y^{\frac{3}{2}}$ oder auch $\omega = (x^2 y^{\frac{3}{2}})^2$ d. h. $\omega = x^4 \cdot y^3$ ist; und so sieht man aus der Form (II.) des allgemeinen Integrals wiederum die Form (I.) hervorgehen.

gefunden seyn mögen, dieses letztere Verfahren anwenden: so würde man sich in seinen Erwartungen getäuscht finden, und die Gleichung in ω, welche man unter der Voraussetzung erhält, daß ω kein z in sich aufnimmt, würde zwar von der Form

$$M \cdot \partial\omega_x + N \cdot \partial\omega_y = 0$$

werden können; aber der Umstand, daß in M oder N der Variable z noch vorkommt, würde darauf hindeuten, daß die Voraussetzung, unter welcher man sie erhalten hat, nicht statthaft ist. Man müßte daher nun das erstere allgemeine Verfahren wiederum aufnehmen, ω als Funktion von x, y und z ansehen, und so die Gleichungen in ω erhalten, welche für die Parzialgleichung (1.)

5) $$-z \cdot (\partial\omega_z - \partial\omega_y) + x \cdot (\partial\omega_y - \partial\omega_x) = 0$$

seyn, und mittelst weniger Versuche $\omega = x+y+z$ liefern wird, so daß

6) $z = x \cdot \psi_{\omega'}$ wo $\omega = x+y+z$ ist,

als das allgemeine Integral von (1.) erkannt wird.

Die Parzialgleichung (2.) dagegen findet sich auf diesem Wege im 1sten Beispiel integrirt.

Beispiel 4. Als ein merkwürdiges Beispiel, in welchem ω auch noch z in sich aufnimmt, sey gegeben die Parzialgleichung

1) $$z^2 + \partial z_x^2 \cdot (\partial z_y^2 - x^2) = 0$$

und die Form ihres allgemeinen Integrals

2) $z = x \cdot \psi_{\omega'}$ wo ω noch gesucht wird.

Das oben gelehrte Verfahren giebt als Gleichung zur Bestimmung von ω

3)

$$2xz \cdot (z \cdot \partial\omega_z - x \cdot \partial\omega_x) - (5x^2z^2 \cdot \partial\omega_z^2 + z^2 \cdot \partial\omega_y^2 - x^4 \cdot \partial\omega_x^2 + 4x^3z \cdot \partial\omega_x \cdot \partial\omega_z)$$
$$+ (4x^3z^2 \cdot \partial\omega_z^3 + 2x^4z \cdot \partial\omega_x \cdot \partial\omega_z^2 - 2x^5 \cdot \partial\omega_x^2 \cdot \partial\omega_z - 2x^2z \cdot \partial\omega_x \cdot \partial\omega_y^2)$$
$$- x^4 \cdot (z^2 \cdot \partial\omega_z^4 - x^2 \cdot \partial\omega_x^2 \cdot \partial\omega_z^2 + \partial\omega_x^2 \cdot \partial\omega_y^3) = 0.$$

Setzt man hier die Summe der Glieder der ersten Dimension der Null gleich, so erhält man

4) $$z \cdot \partial\omega_z + x \cdot \partial\omega_x = 0.$$

Setzt man die Summe der Glieder der 2ten Dimension der Null gleich, und zu gleicher Zeit aus (4.) $-\frac{x}{z} \cdot \partial\omega_x$ statt $\partial\omega_z$; so erhält man

5) $$\partial\omega_y = 0,$$

und diese beiden Gleichungen (4. u. 5.) machen die Summe der Glie-

der Glieder der 3ten und auch die der Glieder der 4ten Dimension wirklich $=0$, so daß aus (5.) ω nach y konstant, aus (4.) dagegen $\omega = \frac{x}{z}$ hervorgeht. Das allgemeine Integral, wenn ein solches in endlicher Form existirt, und wenn (2.) die richtige Form desselben gewesen ist, ist daher jetzt

6) $$z = x \cdot \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{x}{z}.$$

Weil aber, wenn $\frac{z}{x} = u$ gesetzt wird, dieses Integral (6.) die Form $u = \varphi_u$, d. h. $u = \text{Const.} = a$, d. h. $\frac{z}{x} = a$ oder

7) $$z = a \cdot x$$

annimmt; so ist Gleichung (7.) mit der willkührlichen Konstante a eben so allgemein als die Gleichung (6.) mit der willkührlichen Funktion ψ von $\frac{x}{z}$.

Man konnte auch hier aus (4.) sogleich $\partial\omega_z = 0$ und $\partial\omega_x = 0$ ziehen, während in (5.) $\partial\omega_y = 0$ bereits gefunden war. Man bekam dann ω konstant (nach x, y und z); also auch $\psi_\omega = a$ und

$$z = a \cdot x$$

als das gesuchte Integral.

III. Nachdem wir aber gelernt haben, das allgemeine Integral einer Parzialgleichung der ersten Ordnung zu finden, sobald die Form desselben bekannt ist; so dürfen wir nur noch zeigen, wie man sich diese Form selbst verschafft. Dies geschieht aber auf folgende Art:

Man sucht sich auf irgend einem Wege ein besonderes Integral der gegebenen Parzialgleichung $F = 0$ zu verschaffen, welches jedoch wenigstens eine willkührliche Konstante a (die in $F = 0$ selbst nicht vorkommt) enthalten muß. Ist selbiges durch

$$V_{x,y,z,a} = 0$$

vorgestellt; so darf man nur ψ_ω statt der willkührlichen Konstante a setzen, und man hat die Form des allgemeinen Integrals, zu welcher dann noch ω gefunden werden muß (wie solches in (I.) gelehrt worden ist), um das allgemeine Integral selbst zu erhalten.

Denn jedes besondere Integral, also auch das gegebene

$$V_{x,y,z,a} = 0$$

ist durch das allgemeine Integral

$$W_{x,y,z,\pi} = 0$$

vorgestellt, sobald man sich unter π eine bestimmte Funktion von ω denkt, welche hier auch noch a enthält, welche also eine bestimmte Funktion von ω und a ist *). So wie daher statt a eine willkührliche Funktion ψ_ω gesetzt wird, so hat man immer noch dieselbe Form des allgemeinen Integrals, nur daß π jetzt eine bestimmte Funktion von ω und ψ_ω, also, weil ψ_ω willkührlich ist, abermals eine willkührliche Funktion von ω vorstellt, wodurch das Integral nicht bloß die Form, sondern auch das Wesen des allgemeinen Integrals angenommen hat.

Beispiele. Im Beispiel (1.) der (I.) findet man bald, indem man versucht, ob nicht ∂z_x oder ∂z_y Null werden könne, daß für $\partial z_x = 0$ alle x aus der gegebenen Parzialgleichung herausfallen, solche also bloß

$$(z - y \cdot \partial z_y)^2 - \partial z_y = 0$$

wird; so daß, weil dies jetzt eine Differenzialgleichung mit nur einem einzigen unabhängigen Veränderlichen ist (nach §. 265. oder §. 266.),

$$z = a + a^2 \cdot y$$

als ein besonderes Integral jener Parzialgleichung gefunden wird. Also ist die Form des allgemeinen Integrals

$$z = \psi_\omega + y \cdot \psi_\omega^2,$$

während im angeführten (Beispiel 1.) ω selbst noch dazu gefunden worden ist.

Im Beispiel (2. der I.) zeigt sich für $\partial z_y = 0$,

$$z - x \cdot \partial z_x = 0 \quad \text{d. h.} \quad z = a \cdot x$$

---

*) Denn käme dieses a in ω selbst wesentlich vor, so daß es nicht wegfallen könnte, wenn man statt ω eine Funktion des zuerst unter ω gedachten Ausdruckes setzt; so würde dasselbe nothwendig auch in der Differenzialgleichung $F = 0$ vorkommen, also keine willkührliche Konstante seyn.

als ein besonderes Integral; also ist

$$z = x \cdot \psi_\omega$$

die Form des allgemeinen Integrals, während in demselben Beispiel (2.) ω noch dazu gefunden worden ist.

In den Beispielen (3. der I. und 1. der II.) findet sich wieder, indem man $\partial z_x = 0$ setzt, $z^2 = a \cdot y$ als ein besonderes Integral; also ist

$$z^2 = y \cdot \psi_\omega$$

die Form des allgemeinen Integrals, während ω daselbst noch dazu gefunden worden ist.

Im Beispiel (2. der II.) war es schwieriger, iedoch bei einiger Uebung nicht allzuschwer, das besondere Integral

$$z = a \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2$$

aufzufinden, welches dann die Form des allgemeinen Integrals

$$z = x^2 \cdot \psi_\omega + y^2 \cdot \psi_\omega^2$$

an die Hand gab.

Im Beispiel (6. der I.) war dagegen das besondere Integral

$$z = ax$$

wiederum leicht zu finden.

Als neue Beispiele betrachte man noch:

1) Der Gleichung

$$3xy^3 \cdot (x^2 + y^2) \cdot [(z + x \cdot \partial z_x)^3 - x^2 \cdot \partial z_y^2]^2$$
$$= [\partial z_y^2 \cdot (2x^4 y + x^3 y^2 + xy^4) - (z + x \cdot \partial z_x)^2 \cdot (x^3 + xy^2 + 2y^3)]^2$$

genügt das besondere Integral

$$z = \frac{a}{x} \quad \text{oder} \quad x \cdot z = a,$$

also ist das allgemeine Integral dieser Parzialgleichung gefunden, nämlich

$$x \cdot z = \varphi_\omega.$$

Sucht man nun noch ω dazu, so findet man

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \omega_z} = \frac{\sqrt{y^2(x^2+y^2)} + \sqrt{2x^3 y}}{\sqrt{x^2(x^2+y^2)} + \sqrt{2x^3 y}},$$

woraus

$$\omega = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy}$$

folgt.

2) Für die Parzialgleichung

$$x^2 \cdot z^2 + x^4 \cdot \partial z_x^2 + x^2 \cdot y^2 \cdot \partial z_y^2 + 2x^3 \cdot z \cdot \partial z_x + 2x^2 \cdot yz \cdot \partial z_y + 2x^3 \cdot y \cdot \partial z_x \cdot \partial z_y$$
$$= 4y^3 \cdot e^{2x} \cdot x^3 \cdot \partial z_y^2$$

findet man, indem man $\partial z_y = 0$ setzt,

$$z = \frac{a}{x} \quad \text{oder} \quad x \cdot z = a$$

als ein besonderes Integral. Also ist

$$z = x^{-1} \cdot \varphi_\omega$$

das allgemeine Integral, und zur Bestimmung von ω hat man die Gleichung

$$x \cdot \partial\omega_x + (y - 2e^x \cdot y \cdot \sqrt{xy}) \cdot \partial\omega_y = 0,$$

so daß $$\omega = e^x - \sqrt{\frac{x}{y}}$$ hervorgeht.

3) Für die Parzialgleichung

$$z + yz \cdot log\,(by) + y(x-y)\,log\,(by) \cdot \partial z_y - (x-y) \cdot \partial z_x = 0$$

findet sich auf demselben Wege das allgemeine Integral

$$x - y = z \cdot \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = e^x \cdot log\,(by).$$

Anmerkung. Auch im Beispiel (4. der II.) ergab sich schnell das besondere Integral

$$z = a \cdot x,$$

woraus wir die Form des allgemeinen Integrals

$$z = x \cdot \psi_\omega$$

gefolgert haben. Wenn aber dann die Anwendung unserer Methoden in dem angeführten Beispiel doch nur immer wieder zu demselben besonderen Integral $z = a \cdot x$ zurückgeführt hat; so ist dies ein schlagender Beweis „daß dieser Parzial-„gleichung

$$z^2 + \partial z_x^2 \cdot (\partial z_y^2 - x^2) = 0$$

„kein allgemeines Integral in endlicher Form zu-„kommt, weil, gäbe es ein solches, dasselbe auch hier, vermöge „der hier angewandten Methoden, nothwendig hätte gefunden „werden müssen." Von dieser Parzialgleichung kann daher das allgemeine Integral nur in Form einer unendlichen Reihe gefunden werden *).

---

*) Man beachte diesen Umstand besonders. Die beigebrachten und beizubringenden Methoden, das allgemeine Integral in endlicher

Dieselbe Parzialgleichung

$$z^2 + \partial z_x^2 \cdot (\partial z_y^2 - x^2) = 0$$

hat außer den besonderen Integralen

$$z = a \cdot x \quad \text{und} \quad z = \frac{a}{x}$$

auch noch das besondere Integral

$$z = y \cdot X, \text{ wo } X \text{ gegeben ist durch die Gleichung}$$

$$c = e^{\frac{x}{2(x - \sqrt{x^2 - X^2})}} \cdot X^{\frac{1}{2}} \cdot (x - \sqrt{x^2 - X^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Wollte man daraus die Form des allgemeinen Integrals nach unserer eben mitgetheilten Methode finden; so müßte solches

$$\varphi_\omega = e^{\frac{x}{x - \sqrt{x^2 - X^2}}} \cdot X \cdot (x - \sqrt{x^2 - X^2}), \text{ wo } X = \frac{z}{y}$$

seyn, während man

$$\omega = e^{\frac{x}{x - \sqrt{x^2 - U^2}}} \cdot U \cdot (x - \sqrt{x^2 - U^2}), \text{ wo } U = \frac{x}{y}$$

hätte. Man findet aber aus der erstern dieser Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_x &= 2(X - \partial X_x \cdot \sqrt{x^2 - X^2} \\ \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_y &= -2\sqrt{x^2 - X^2} \cdot \partial X_y \end{aligned}\right\} \text{ wo } \left\{\begin{aligned} \partial X_x &= \frac{\partial z_x}{y} \\ \partial X_y &= \frac{y \cdot \partial z_y - z}{y^2} \end{aligned}\right\} \text{ ist,}$$

so wie aus der andern der obigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \partial\omega_x &= 2(U - \partial U_x \cdot \sqrt{x^2 - U^2}) \\ \partial\omega_y &= -2\sqrt{x^2 - U^2} \cdot \partial U_y \end{aligned}\right\}, \text{ wo } \left\{\begin{aligned} \partial U_x &= \frac{1}{y} \\ \partial U_y &= -\frac{x}{y^2} \end{aligned}\right\} \text{ ist,}$$

Form zu finden, gründen sich alle auf die Voraussetzung der Existenz eines solchen. So wie daher die Resultate dieser Methoden zuletzt geprüft werden, und nicht dem beabsichtigten Erfolge entsprechen: so oft hat man hieran einen völlig überzeugenden Beweis, daß die Voraussetzung der Existenz dasmal nicht zulässig ist, sondern daß das gefundene Resultat zwar genügen, aber nur ein besonderes Integral seyn wird.

hervorgeht. Setzt man aber diese Werthe von $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$ in die beiden vorhergehenden Gleichungen, eliminirt man nachher $\partial\varphi_\omega$ vollends weg; so erhält man eine Gleichung, welche mit der gegebenen Differenzialgleichung keineswegs zusammenfällt.

Und hierdurch sieht man abermals bestätigt, daß dieser gegebenen Parzialgleichung ein allgemeines Integral in endlicher Form nicht zukommt.

IV. Weil aber sonach jedes besondere Integral von

$$F_{x,y,z,z_1,_1z} = 0,$$

welches wenigstens eine willkührliche Konstante a hat (die in $F = 0$ noch nicht vorkommt) zur Auffindung des allgemeinen Integrals ausreicht, so oft solches in endlicher Form existirt; so mögen alle besonderen Integrale mit wenigstens einer willkührlichen Konstante ausreichende Integrale heißen, dagegen sollen nicht ausreichende alle die übrigen besonderen Integrale genannt werden, welche gar keine willkührliche Konstante in sich aufgenommen haben.

V. Und sollte ein besonderes Integral mehr als eine willkührliche Konstante in sich aufgenommen haben [in welchem Falle dasselbe ein vollständiges (kompletes) Integral genannt wird, während die übrigen besonderen Integrale, welche gar keine oder nur eine einzige willkührliche Konstante enthalten, unvollständige (inkomplete) heißen]; so würde es, wollte man nach den eben mitgetheilten Methoden das allgemeine Integral daraus finden, gerathen aber nicht nothwendig seyn, diesen willkührlichen Konstanten, bis auf eine einzige derselben, die Werthe 0 (Null) oder solche bestimmte Werthe beizulegen, welche die Rechnungen vereinfachen. Folgendes Beispiel mag dies näher erörtern.

Beispiel. Hat man von der Parzialgleichung

1) $-4x^3\cdot(2z-x\cdot\partial z_x+y\cdot\partial z_y)+y^2\cdot(2z+x\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y)^2 = 0$

das besondere Integral

2) $z = a^2x^2+b^2x^3y+a^4y^2+2a^2b^2xy^3+b^4x^2y^4$

gefunden; so kann man statt a eine willkührliche Funktion ψ_ω setzen, und hat dann das allgemeine Integral

3) $z = x^2 \cdot \psi_\omega^2 + b^2 x^3 y + y^2 \cdot \psi_\omega^4 + 2b^2 x y^3 \cdot \psi_\omega^2 + b^4 x^2 y^4$,

wo nur noch ω zu suchen bleibt. Aber nach (I.) erhält man zur Bestimmung von ω, nach gehöriger Reduktion,

4) $x \cdot \partial\omega_x - y \cdot \partial\omega_y = 0$,

so daß $\omega = xy$ gefunden wird. — Die Gleichung (3.) läßt sich dann auch so schreiben

5) $z = x^2 \cdot (\psi_\omega^2 + b^2\omega) + y^2 \cdot (\psi_\omega^2 + b^2\omega)^2$,

und giebt, da $\psi_\omega^2 + b^2\omega$ ebenfalls nichts anders als eine willkührliche Funktion von ω ist, welche durch π_ω bezeichnet werden kann, das allgemeine Integral in der einfachsten Gestalt, nämlich

6) $z = x^2 \cdot \pi_\omega + y^2 \cdot \pi_\omega^2$, wo $\omega = xy$ ist.

Hätte man nicht statt a, sondern statt b eine willkührliche Funktion ψ_ω gesetzt, so hätte man aus dem besondern Integral (2.) das allgemeine Integral

7) $z = a^2 x^2 + x^3 y \cdot \psi_\omega^2 + a^4 y^2 + 2a^2 x y^3 \cdot \psi_\omega^2 + x^2 y^4 \cdot \psi_\omega^4$

erhalten, während die Gleichung zur Bestimmung von ω wiederum die obige (4.) wird, so daß $\omega = xy$, oder gleich einer Funktion von xy genommen werden muß. Aber auch dieses Integral (7.) läßt sich schreiben

8) $z = x^2(a^2 + \omega \cdot \psi_\omega^2) + y^2 \cdot (a^2 + \omega \cdot \psi_\omega^2)^2$, wo $\omega = xy$,

so daß auch diese Form auf die einfachste Form (6.) zurückgebracht wird.

Hätte man aber vorher, als ψ_ω statt a gesetzt wurde, sogleich $b = 0$ gesetzt, oder hätte man später als ψ_ω statt b gesetzt wurde, sogleich $a = 0$ genommen; so hätte man jedesmal dasselbe allgemeine Integral, aber mit viel weniger Rechnung, und sogleich auch in einfacherer und in der einfachsten Gestalt erhalten.

Anmerkung. Die in diesem Paragraphen beschriebene Methode von einem besondern, aber ausreichenden Integral einer Parzialgleichung der Isten Ordnung sich zu dem allgemeinen Integral in endlicher Form zu erheben, ist aber um so wichtiger, als in den meisten Anwendungen (auf physikalische Fragen) die Natur der Untersuchung fast allemal besondere Werthe von z, (also besondere Integrale) unmittelbar an die Hand giebt; so daß

die ganze Schwierigkeit eigentlich bloß auf die Behandlung der Gleichung für ω beruht, d. h. darauf, einen der Gleichung von der Form

$$(\odot) \cdots \quad M \cdot \partial\omega_x + N \cdot \partial\omega_y + P \cdot \partial\omega_z = 0,$$

wo M, N, P gegebene Funktionen von x, y und z ohne ω sind, genügenden Werth für ω aufzufinden. Deshalb müssen wir nicht nur später auf die Behandlung solcher Gleichungen $(\odot)$ noch einmal zurückkommen, sondern wir wollen auch jetzt schon in dem nächsten Paragraphen noch einige wichtige hierher gehörige Betrachtungen hinzufügen.

§. 288. Zusatz.

I. Hat man außer einem besondern und ausreichenden Integral

$$1) \quad W_{x,y,z,a} = 0$$

noch ein zweites besonderes Integral

$$2) \quad f_{x,y,z} = 0,$$

welche beide der gegebenen Parzialgleichung

$$3) \quad F_{x,y,z,z_{1,1}z} = 0$$

angehören; so ist nicht bloß

$$4) \quad W_{x,y,z,\psi} = 0$$

das allgemeine Integral der Form nach, sondern man kann auch unmittelbar ω dazu finden, ohne zu irgend einer Parzialgleichung seine Zuflucht nehmen zu müssen, so oft nur ω kein z enthält.

So wie man nämlich weiß oder vermuthet, daß ω kein z mehr enthält; so darf man nur aus den beiden besondern Integralen

$$W_{x,y,z,a} = 0 \quad \text{und} \quad f_{x,y,z} = 0$$

den Veränderlichen z eliminiren, und dann a in x und y ausgedrückt finden, und dieser für a gefundene Ausdruck in x und y kann dann statt ω genommen werden.

Denn es ist der für a gefundene Ausdruck in x und y offenbar derjenige, welcher in $W_{x,y,z,a} = 0$ statt a, also in dem

allgemeinen Integral $W_{x,y,z,\psi} = 0$ statt ψ_ω gesetzt werden müßte, um das besondere Integral $f_{x,y,z} = 0$ zu erhalten. Also ist dieser für a gefundene Ausdruck in x und y eine Funktion von dem gesuchten ω, mithin nach (§. 286. IV. 1.) statt ω selbst zu nehmen.

Beispiel 1. Von der Gleichung

$$1) \qquad z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y = 0$$

habe man die beiden besondern Integrale

$$2) \quad z = ax \quad \text{und} \quad 3) \quad z = y;$$

so erhält man aus (2. und 3.), wenn z eliminirt wird,

$$4) \qquad a = \frac{y}{x},$$

und das allgemeine Integral der Parzialgleichung (1.) ist daher

$$z = x \cdot \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{y}{x} \quad \text{ist.}$$

Hätte man von derselben Parzialgleichung (1.) die beiden besonderen Integrale

$$z = ay + \frac{x^2}{y} \quad \text{und} \quad z = x - y$$

gehabt, so hätte man aus beiden für a gefnnden:

$$a = \frac{x}{y} - 1 - \frac{x^2}{y^2},$$

so daß dieser Ausdruck für ω genommen werden muß. Weil aber dieser Ausdruck offenbar eine Funktion von $\frac{x}{y}$ ist, so ist $\frac{x}{y}$ auch umgekehrt eine Funktion von ihm, und da statt ω jede Funktion von ω gesetzt werden kann; so kann man am bequemsten

$$\omega = \frac{x}{y}$$

nehmen, oder

$$\omega = \frac{y}{x},$$

während das allgemeine Integral nun

$$z = \frac{x^2}{y} + y \cdot \psi_\omega \quad \text{ist, wo} \quad \omega = \frac{y}{x}$$

seyn mag.

Dasselbe allgemeine Integral kann man nun auch schreiben

$$z = y\left(\frac{1}{\omega^2} + \psi_\omega\right)$$

d. h. $z = y \cdot \varphi_\omega$, wo $\omega = \frac{y}{x}$ ist.

Beispiel 2. Von der Parzialgleichung

1) $-4x^4 \cdot (2z - x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y) + y^2 \cdot (2z + x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y)^2 = 0$

habe man die beiden besondern Integrale

2) $z = ax^2 + a^2y^2$ und 3) $z = \frac{x}{y} + \frac{1}{x^2}$;

so erhält man, wenn z eliminirt wird, für a eine quadratische Gleichung, die 2 Werthe für a liefert, nämlich

$$a = \frac{1}{xy} \quad \text{und} \quad a = -\frac{x^3+y}{xy^2}.$$

Denkt man sich den zweiten dieser Werthe unter ω, so findet sich, daß das allgemeine Integral

4) $$z = x^2 \cdot \psi_\omega + y^2 \cdot \psi_\omega^2$$

der Parzialgleichung nicht genügt, also hat ω nur den ersten Werth $\frac{1}{xy}$; da man aber statt ω auch jede Funktion von $\frac{1}{xy}$ setzen kann, so nimmt man am bequemsten

5) $$\omega = xy.$$

Wenn bei der Elimination von z aus den beiden besondern Integralen sich für a kein Ausdruck in x und y, sondern ein konstanter Werth ergiebt; so sind diese beiden Integrale nicht als zwei verschiedene anzusehen, und die Methode muß dann auch ohne Erfolg bleiben.

II. Ist aber von einer Parzialgleichung der ersten Ordnung

1) $$F_{x,y,z,z_1,_1z} = 0$$

ein vollständiges Integral bekannt (d. h. ein besonderes Integral mit wenigstens zwei willkührlichen Konstanten) z. B.

2) $$V_{x,y,z,a,b} = 0;$$

so ist solches immer zweien verschiedenen besonderen Integralen gleich zu achten, welche auch aus ihm hervorgehen, wenn man den Konstanten zweimal verschiedene Werthe beilegt. Am bequemsten ist es in der Regel alle Konstanten bis auf eine a, $= 0$ zu setzen, dann wieder alle bis auf eine andere b der Null gleich zu nehmen.

Hat man daher ein solches vollständiges Integral (2.); so verschafft man sich zuerst zwei verschiedene besondere Integrale, wie solche in (I. und II.) gegeben waren, so nämlich, daß wenigstens das eine davon noch eine willkührliche Konstante enthält. Man verschafft sich dann aus dem einen dieser letztern Integrale nach (§. 287.) die Form des allgemeinen Integrals, und, wenn man vermuthet, daß ω kein z enthalten werde, nach der so eben in (I.) beschriebenen Methode, noch ω dazu. — Hat man aber auf diesem Wege, d. h. auf diese Vermuthung hin, ω gefunden, also das allgemeine Integral

$$W_{x,y,z,\psi} = 0$$

seiner Form und seinem Inhalte nach erhalten; so darf man ja nicht unterlassen zu untersuchen, ob sich diese Vermuthung auch rechtfertigt, d. h. ob das allgemeine Integral wirklich der Partialgleichung genügt. Nur wenn diese Probe sich bestätigt, ist dasselbe als solches anzuerkennen. Findet sich aber diese Voraussetzung nicht gerechtfertigt, so daß man annehmen muß, daß ω auch noch z in sich aufnimmt; so kann man den hier vorgeschlagenen Weg nicht betreten, und so lange kein neuerer bekannt ist, müßte man dann zu dem Verfahren des (§. 287. I.) zurückkehren.

Beispiel 1. Ist z. B.

1) $z = a \cdot x + b \cdot y$

ein besonderes Integral von

2) $z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y = 0;$

so erhält man daraus, wenn man abwechselnd $b = 0$ oder $a = 0$ setzt, die beiden besondern Integrale

3) $z = ax,$ 4) $z = by,$

dann nach (§. 287. III.)

5) $z = x \cdot \psi_\omega$

als allgemeines Integral, wozu noch ω gefunden werden muß, während sich nach (§. 288. I.)

$$\omega = b\frac{y}{x} \quad \text{oder auch} \quad \omega = \frac{y}{x}$$

dazu findet.

Man konnte aber auch aus (4) die Form

6) $z = y \cdot \varphi_\omega$

des allgemeinen Integrals nehmen, und dann

$\omega = \frac{a \cdot x}{y}$ oder $\omega = \frac{x}{y}$ oder $\omega = \frac{y}{x}$

dazu erhalten.

Und hätte man von derselben Parzialgleichung das besondere Integral

7) $z = ax + by + cx \cdot Sin \frac{x}{y}$

mit den drei willkührlichen Konstanten a, b, c gehabt; so könnte man sich nach Willkühr zwei verschiedene besondere Integrale bilden, etwa

8) $z = c \cdot x \cdot Sin \frac{x}{y}$ und 9) $z = b \cdot y$,

dann die Form des allgemeinen Integrals

10) $z = x \cdot Sin \frac{x}{y} \cdot \psi_\omega$,

und dazu nach (I.)

11) $\omega = b \frac{y}{x} \cdot Sin \frac{x}{y}$

finden. Weil aber dann ω eine Funktion von $\frac{x}{y}$ gewesen wäre, also $\frac{x}{y}$ eine Funktion dieses ω; so kann man auch nach (§. 286. V.)

12) $\omega = \frac{x}{y}$

nehmen, während dann das allgemeine Integral (10.) auch

13) $z = x \cdot (Sin\, \omega \cdot \psi_\omega)$ d. h. $z = x \cdot \varphi_\omega$

geschrieben werden kann.

Auf allen Wegen erhält man daher jedesmal ein und dasselbe Resultat.

Beispiel 2. Hat man aber von der Parzialgleichung

1) $y \cdot z + (z^2 + x^2) \cdot \partial z_y - x \cdot y \cdot \partial z_x = 0$

das besondere, jedoch vollständige Integral

2) $z^2 - \frac{z}{ax} + x^2 + y^2 + b = 0$

gegeben; so kann man sich daraus, indem man $b = 0$ und nachher $a = 1$ setzt, die beiden besonderen Integrale

3) $z^2-\frac{z}{ax}+x^2+y^2=0$ und 4) $z^2-\frac{z}{x}+x^2+y^2+b=0$

verschaffen, woraus zunächst das allgemeine Integral

5) $$z^2-\frac{z}{x\cdot\psi_\omega}+x^2+y^2=0$$

hervorgeht, während die Anwendung der vorstehenden Regel auf die Bestimmung von ω, zur Gleichung

6) $(b^2x^2+x^2+y^2)\cdot\omega^2-(b+2x^2+2y^2)\omega+(b+x^2+y^2)=0$

führt, welche Gleichung jedoch ω so liefert, daß die Gleichung (4.) für diesen Werth von ω, der gegebenen Parzialgleichung (1.) nicht genügt, also daß die Voraussetzung „ω werde kein z enthalten" dasmal sich nicht bestätigt findet. Demnach bleibt für den Augenblick kein anderes Mittel übrig, ω zu bestimmen, als das (§. 287. I.) beschriebene, welches zur Parzialgleichung

(⊙) ... $$M\cdot\partial\omega_x+N\cdot\partial\omega_y+P\cdot\partial\omega_z=0$$

führt.

III. A) Dieselben in (§. 287. III.) angeführten Gründe bringen uns auch zu der Ueberzeugung, daß man von jedem besondern und vollständigen Integral abermals zum allgemeinen Integral gelangt, wenn man statt jeder der willkührlichen Konstanten a, b, c, ꝛc. eine beliebige und von der andern unabhängige Funktion von ω (ψ_ω, ψ'_ω, ψ''_ω, ꝛc.) setzt, und dann noch ω dazu sucht. Man wird aber zuletzt dem entstehenden Resultat allemal eine Form geben können, welche erlaubt, alle diese willkührlichen Funktionen in eine einzige zusammenzufassen.

B) Aber eben deshalb wird man auch aus jedem besondern und vollständigen Integral das allgemeine sogleich erhalten, wenn man zuerst unter b allein, oder unter b, c, ꝛc. zugleich, beliebig willkührliche Funktionen von a, dann aber unter jedem a eine bestimmte oder ebenfalls willkührliche Funktion von ω sich denkt, wenn nur zuletzt noch ω dazu gefunden wird.

C) Desgleichen wird man aus einem solchen besondern aber vollständigen Integral mit mehr als zwei willkührlichen Konstanten a, b, c, ꝛc. das allgemeine Integral erhalten, wenn man sich unter c, ꝛc. willkührliche Funktionen von a und b, unter a und

b aber bestimmte oder ebenfalls willkührliche Funktionen von ω denkt.

D) Es ist leicht, diese Betrachtungen weiter und beliebig weit zu verfolgen. Welchen der hier vorgeschlagenen Wege man aber auch betreten mag, so kann man doch das entstehende allgemeine Integral allemal dergestalt umformen, daß sich alle diese willkührlichen Funktionen in eine einzige willkührliche Funktion von ω vereinigen lassen.

Beispiele. Aus den zur Gleichung

$$z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y = 0$$

gehörigen besonderen Integralen,

1) $z = ax + by$,

2) $z = Ay + B\frac{x^2}{y}$,

3) $z = a\frac{y^2}{x} + by + cx \cdot Sin\frac{y}{x}$

gehen demnach sogleich die allgemeinen Integrale hervor, beziehlich

I. $z = x \cdot \psi_\omega + y \cdot \psi'_\omega$,

II. $z = y \cdot \psi_\omega + \frac{x^2}{y} \cdot \psi'_\omega$,

III. $z = \frac{y^2}{x} \cdot \psi_\omega + y \cdot \psi'_\omega + x\left(Sin\frac{y}{x}\right) \cdot \psi''_\omega$,

wo $\omega = \frac{y}{x}$ ist, welche sich jedoch auch schreiben lassen

$\alpha)$ $z = x\left(\psi_\omega + \frac{y}{x} \cdot \psi'_\omega\right)$,

$\beta)$ $z = y\left(\psi_\omega + \frac{x^2}{y^2} \cdot \psi_\omega\right)$,

$\gamma)$ $z = x\left(\frac{y^2}{x^2}\psi_\omega + \frac{y}{x}\psi'_\omega + \psi''_\omega \cdot Sin\frac{y}{x}\right)$,

welche mithin, weil $\omega = \frac{y}{x}$ ist, alle dreie in

$$z = x \cdot \pi_\omega \quad \text{oder} \quad z = y \cdot \Phi_\omega$$

sich vereinigen.

E) Betritt man den einen oder den andern der hier in (III.) vorgeschlagenen Wege, um sich von dem besondern und vollständigen Integral

$$V_{x,y,z,a,b,\,\text{ꝛc.}} = 0$$

zu dem allgemeinen Integral zu erheben; so kann man die einzelnen, bis jetzt ganz willkührlich gedachten Funktionen offenbar auch allerlei verschiedenen Bedingungen unterwerfen, wenn nur zuletzt eine einzige ganz willkührliche Funktion noch übrig bleibt.

IV. Jedes Integral $W = 0$ einer gegebenen Parzialgleichung

$$F_{x,y,z,z_1,{}_1z} = 0$$

muß die Eigenschaft haben, daß, wenn man aus

$$W = 0, \quad \partial W_{(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \partial W_{(y)} = 0$$

sowohl z als auch ∂z_x, ∂z_y findet, und diese Werthe in $F = 0$ statt z, z_1, ${}_1z$ subſtituirt, letztere $F = 0$ identisch wird, d. h. die Form $0 = 0$ annimmt.

A) Ist nun $W = 0$ ein allgemeines Integral mit der willkührlichen Funktion ψ_ω; so enthalten W, $\partial W_{(x)}$, $\partial W_{(y)}$, also auch die aus

$$W = 0, \quad \partial W_{(x)} = 0, \quad \partial W_{(y)} = 0$$

hervorgehenden Werthe von z, ∂z_x, ∂z_y die völlig unbestimmten Ausdrücke ψ_ω, $\partial\psi_\omega$, welche sich also bei der Subſtitution dieser Werthe in $F = 0$ gegenseitig wegheben müssen. Eliminirt man daher ψ_ω und $\partial\psi_\omega$ aus diesen 3 Gleichungen

$$W = 0, \quad \partial W_{(x)} = 0, \quad \partial W_{(y)} = 0,$$

so muß man zur Parzial-Differenzialgleichung $F = 0$ gelangen, wie bereits früher gesagt worden ist.

B) Ist aber W ein besonderes Integral mit einer oder mit zweien oder mit mehr willkührlichen (d. h. in F noch nicht vorkommenden) Konstanten a, b, c, ꝛc.; so müssen sich, wenn man die aus

$$W = 0, \quad \partial W_{(x)} = 0, \quad \partial W_{(y)} = 0$$

für z, ∂z_x, ∂z_y gezogenen Werthe in $F = 0$ subſtituirt, diese willkührlichen Konstanten a, b, c, ꝛc. von selbst wegheben, weil die entstehende Gleichung identisch $0 = 0$ werden muß.

C) Hat daher $W = 0$ wenigstens zwei solche willkührliche Konstanten a und b; so muß man, wenn aus

$$W = 0, \quad \partial W_{(x)} = 0, \quad \partial W_{(y)} = 0$$

diese beiden Konstanten a und b eliminirt werden, nothwendig zur gegebenen Parzial-Differenzialgleichung $F = 0$ wiederum gelangen, und die übrigen willkührlichen Konstanten c, e, ꝛc., wenn deren in $W = 0$ noch vorhanden gewesen sind, müssen natürlich dabei von selber mit fortgehen.

Eliminirt man aus dem besonderen Integral

$$1) \qquad z = ay + b\frac{x^2}{y} + y \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^c$$

der Parzialgleichung

$$(\mathbb{C}) \qquad z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y = 0,$$

und aus dessen beiden Ableitungen

$$2) \qquad \partial z_x = 2b\frac{x}{y} + c \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{c-1},$$

$$3) \qquad \partial z_y = a - b\frac{x^2}{y^2} + \left(\frac{x}{y}\right)^c - c \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^c$$

a und b, so fällt c von selbst weg, und man erhält die Parzialgleichung ($\mathbb{C}$). Dieselbe erhält man aber auch, wenn man a und c aus (1.—3.) eliminirt, wo dann b von selbst wegfällt. Endlich kann man aus (1.—3.) b und c eliminiren, und es wird a von selbst mit fortgehen, und die Gleichung ($\mathbb{C}$) wird sich wiederum erzeugen.

Nimmt man dagegen ein besonderes Integral von der Gleichung ($\mathbb{C}$) bloß mit einer Konstante, nämlich

$$4) \qquad z = y + b\frac{x^2}{y},$$

und dessen zwei Ableitungsgleichungen

$$5) \qquad \partial z_x = 2b\frac{x}{y}$$

$$6) \qquad \partial z_y = 1 - b\frac{x^2}{y^2};$$

so muß zwar noch immer die Gleichung ($\mathbb{C}$) identisch werden, wenn man die aus (4.—6.) für z, ∂z_x, ∂z_y gezogenen Werthe in ($\mathbb{C}$) substituirt, d. h. b muß sich von selber wegheben: aber man wird nicht nothwendig zur Differenzialgleichung ($\mathbb{C}$) gelangen, wenn man aus diesen Gleichungen (4.—6.) diese einzige Konstante b eliminirt.

D) Diese Betrachtungen geben aber ein Mittel an die Hand, aus einem besonderen, jedoch vollständigen Integral das allgemeine Integral mit der willkührlichen Funktion ψ_ω zu erhalten; so daß ω, auch wenn solches noch z enthält, nicht, wie im (§. 287. oder §. 288. II.) noch erfordert wurde, durch eine Parzialgleichung, sondern durch eine Ur-Gleichung bestimmt wird.

V. Ist nämlich von einer gegebenen Parzialgleichung

$$F_{x,y,z,z_1,_1z} = 0$$

die Gleichung

$$1) \qquad V_{x,y,z,a,b} = 0$$

ein besonderes aber vollständiges Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten a und b; so genügt dieselbe Form $V = 0$ der Parzialgleichung $F = 0$ noch immer, wenn man sich auch a und b als Funktionen von x, y und z denkt, so lange nur die beiden Gleichungen $\partial V_{(x)} = 0$ und $\partial V_{(y)} = 0$ der Form nach genau dieselben bleiben, wie wenn a und b konstant gedacht sind, also so lange nur

$$2) \qquad \partial V_a \cdot \partial a_{(x)} + \partial V_b \cdot \partial b_{(x)} = 0$$

und

$$3) \qquad \partial V_a \cdot \partial a_{(y)} + \partial V_b \cdot \partial b_{(y)} = 0 \text{ *)}$$

genommen werden. Diesen beiden Gleichungen (2. und 3.) wird aber durch die einzige Gleichung

$$4) \qquad \partial V_a \cdot \partial a_\omega + \partial V_b \cdot \partial b_\omega = 0$$

entsprochen, sobald man sich a und b als Funktionen eines ein-

---

*) Sind nämlich a und b konstant, so hat man

$$\partial V_{(x)} = \partial V_x + \partial V_z \cdot \partial z_x,$$

$$\partial V_{(y)} = \partial V_y + \partial V_z \cdot \partial z_y;$$

sind aber a und b Funktionen von ω, und ist ω wiederum eine Funktion von x, y und z, so hat man

$$\partial V_{(x)} = \partial V_x + \partial V_z \cdot \partial z_x + \partial V_a \cdot \partial a_{(x)} + \partial V_b \cdot \partial b_{(x)},$$

$$\partial V_{(y)} = \partial V_y + \partial V_z \cdot \partial z_y + \partial V_a \cdot \partial a_{(y)} + \partial V_{(b)} \cdot \partial b_{(y)}.$$

zigen Veränderlichen ω denkt, unter ω aber wiederum eine Funktion von x, y und z, welche der Gleichung (4.) genügt, weil dann

$$\partial a_{(x)} = \partial a_\omega \cdot \partial \omega_{(x)}, \quad \partial a_{(y)} = \partial a_\omega \cdot \partial \omega_{(y)},$$

und $\partial b_{(x)} = \partial b_\omega \cdot \partial \omega_{(x)}, \quad \partial b_{(y)} = \partial b_\omega \cdot \partial \omega_{(y)}$ wird.

Also erhält man aus dem besonderen Integral

1) $$V_{x,y,z,a,b} = 0$$

das allgemeine Integral

2) $$W_{x,y,z,\psi} = 0,$$

wenn man (nach III.) statt a und b beliebige willkührliche Funktionen von ω setzt, dagegen ω aus der Gleichung

4) $$\partial V_a \cdot \partial a_\omega + \partial V_b \cdot \partial b_\omega = 0$$

dazu bestimmt.

Betrachten wir nun diese Gleichung (4.) zur Bestimmung von ω etwas näher. — Da

1) $$V_{x,y,z,a,b} = 0$$

bereits durch

2) $$W_{x,y,z,\psi_\omega} = 0$$

vorgestellt ist, sobald man sich unter ψ die gehörige und bestimmte Funktion von ω denkt (welche dasmal auch noch eine Funktion von a und b seyn muß); so kann man der Gleichung $V = 0$ allemal eine solche Form geben, daß

5) $\partial V_a = \partial W_\psi \cdot \partial \psi_a$ und 6) $\partial V_b = \partial W_\psi \cdot \partial \psi_b$,

also

7) $$\partial V_a \cdot \partial a_\omega + \partial V_b \cdot \partial b_\omega = \partial W_\psi \cdot (\partial \psi_a \cdot \partial a_\omega + \partial \psi_b \cdot \partial b_\omega)$$

ist. Dann reduzirt sich die Gleichung

4) $$\partial V_a \cdot \partial a_\omega + \partial V \cdot \partial b_\omega = 0,$$

welche zur Bestimmung von ω dient, wenn ihre beiden Glieder ∂V_a und ∂V_b durch ihren gemeinschaftlichen Faktor ∂W_ψ wegdividirt werden, allemal auf diese

5) $$\partial \psi_a \cdot \partial a_\omega + \partial \psi_b \cdot \partial b_\omega = 0,$$

wo offenbar x, y, z nur in ω vorkommen können.

Setzt man daher voraus, daß die gegebene Gleichung $V = 0$ bereits die hier gedachte Form angenommen habe, und dividirt man die Gleichung (4.) durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler; so kann die entstehende Gleichung außer a und b kein x, kein y und kein z außerhalb ω mehr enthalten. Und weil endlich die Gleichung (4. oder 5.) immer identisch werden muß, welche Funktionen von ω statt a und statt b gesetzt werden; so kann man zuletzt noch statt a und statt b ganz beliebige aber bestimmte Funktionen von ω setzen, und man wird die Gleichung zwischen ω und x, y, z haben, welche eine Urgleichung ist, und unmittelbar zur Bestimmung von ω dient.

Die praktische Regel, nach welcher nun aus dem besondern aber vollständigen Integral

$$V_{x,y,z,a,b} = 0$$

das allgemeine gefunden wird, ist daher folgende:

A) Man setze ψ_ω statt a, statt b (und statt der übrigen Konstanten) aber irgend welche besondere konstante Werthe (in der Regel ist es am bequemsten, die übrigen Konstanten alle $= 0$ zu setzen); oder man setze ψ_ω statt b, und statt a (und statt der übrigen Konstanten) irgend besondere konstante Werthe: so hat man allemal das allgemeine Integral, und darf nur noch ω dazu suchen.

B) Um ω dazu zu finden, differenziire man die Gleichung

$$V_{x,y,z,a,b} = 0$$

nach dem ω was in a und in b steckt (indem man sich a und b als Funktionen von ω denkt); dividire dann die entstehende Gleichung

$$\partial V_a \cdot \partial a_\omega + \partial V_b \cdot \partial b_\omega = 0$$

durch ihren größten (dem ∂V_a und ∂V_b) gemeinschaftlichen Theiler, und setze zuletzt statt a und statt b irgend welche bestimmte Funktionen von ω, also statt ∂a_ω, ∂b_ω was ihre Ableitungen nach ω jedesmal geben: so hat man die Gleichung zwischen ω und x, y und z, welche ω dann unmittelbar liefert.

Obgleich sich noch Näheres über die Form sagen ließe, welche man dem vollständigen Integral $V = 0$ geben muß, wenn diese Methode gelingen soll; so mag hier doch nur die Bemerkung stehen, daß man diese Gleichung nicht in der Form

$$V = f_{x,y,z,a} - b = 0$$

nehmen dürfe, weil sonst $\partial V_b = -1$ gewiß mit $\partial V_a = \partial f_a$ keinen gemeinschaftlichen Faktor ∂W_ψ haben wird. Für die Praxis wird daher nur empfohlen, das vollständige Integral so umzuformen, daß es wenigstmöglich indirekte Operationszeichen (Wurzelzeichen, Divisionszeichen ꝛc.) enthalte, namentlich aber, daß keine der beiden Konstanten a oder b isolirt zu stehen komme.

Jedenfalls muß man aber das nach dieser Methode gefundene Resultat prüfen, ob es wirklich allen Bedingungen genüge, die man an das allgemeine Integral zu machen hat.

Beispiel 1. Ist

1) $$F = z + (x+z)\cdot\partial z_y - x\cdot\partial z_x = 0$$

die gegebene Parzialgleichung und

2) $$V = z^2 + (x+y-ax)\cdot z - (bx+axy+ax^2) = 0$$

das bekannte besondere aber vollständige Integral, so ist die Gleichung zur Bestimmung von ω

3) $$-(xz+xy+x^2)\cdot\partial a_\omega - x\cdot\partial b_\omega = 0;$$

oder, wenn man durch $-x$ dividirt

4) $$(x+y+z)\cdot\partial a_\omega + \partial b_\omega = 0.$$

Setzt man nun hier $\partial a_\omega = 1$ d. h. $a = \omega^1$, $\partial b_\omega = \omega$ d. h. $b = \frac{1}{2}\omega^2$, so erhält man

5) $$x+y+z+\omega = 0 \quad \text{d. h.} \quad \omega = -(x+y+z).$$

Hätte man $a = \omega^2$, $b = \omega^5$ gesetzt, also $\partial a_\omega = 2\omega$, $\partial b_\omega = 5\omega^4$ gehabt; so wäre die Gleichung (4.) jetzt

$$2(x+y+z)\omega + 5\omega^4 = 0$$

geworden, woraus

6) $$\omega = \sqrt[3]{-\tfrac{2}{5}(x+y+z)}$$

hervorgegangen wäre.

Allemal findet sich also hier ω als eine Funktion von $x+y+z$, mithin $x+y+z$ als eine Funktion von ω. Und da nach (§. 286. V.)

statt dieses ersten Werthes von ω jede Funktion desselben für ω gesetzt werden kann, so kann man jedesmal

7) $$\omega = x+y+z$$

selbst nehmen, welches am einfachsten ist.

Die Form des allgemeinen Integrals findet sich aber aus (2.), wenn man $b = 0$ und ψ_ω statt a setzt, und ist daher

8) $$z-x\cdot\psi_\omega = 0.$$

Die Form des allgemeinen Integrals findet sich aber auch aus (2.), wenn man $a = 0$ und $b = \psi_\omega$ setzt, so daß man

9) $$z\cdot(x+y+z)-x\cdot\psi_\omega = 0$$

erhält. Weil jedoch $\omega = x+y+z$ genommen wird, so läßt sich diese Form (9.) auch so schreiben

10) $$z-x\cdot\frac{\psi_\omega}{\omega} = 0 \quad \text{d. h.} \quad z-x\cdot\varphi_\omega = 0,$$

ist also von der Form (8.) nicht verschieden.

Beispiel 2. Ist die Parzialgleichung

1) $$yz+(z^2+x^2)\cdot\partial z_y-xy\cdot\partial z_x = 0$$

gegeben und das ihr zugehörige besondere aber vollständige Integral

2) $$V = ax\cdot z^2-z+(x^2+y^2+b)ax = 0;$$

so hat man zur Bestimmung von ω die Gleichung

$$[xz^2+(x^2+y^2+b)x]\cdot\partial a_\omega+ax\cdot\partial b_\omega = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad (x^2+y^2+z^2+b)\cdot\partial a_\omega+a\cdot\partial b_\omega = 0,$$

woraus, wenn man $\partial a_\omega = \partial b_\omega = 1$, also $a = b = \omega$ setzt, sogleich

$$\omega = -\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

hervorgeht, so daß man

$$\omega = x^2+y^2+z^2$$

nehmen kann*).

---

*) Hätte man das besondere Integral (2.) durch ax wegdividirt, also in der Form

$$V = z^2-\frac{z}{ax}+x^2+y^2+b = 0$$

geschrieben, so wäre die Gleichung

$$\partial V_a\cdot\partial a_\omega+\partial V_b\cdot\partial b_\omega = 0$$

Anmerkung I. Man hat (Léçons sur le calcul des fonctions. 1806. Lec. XX. p. 369.), statt des eben beschriebenen Weges, zu demselben Zwecke nachstehenden betreten.

Man dachte sich in dem vollständigen Integral

1) $$V_{x,y,z,a,b} = 0$$

b als eine willkührliche Funktion von a, a dagegen als diejenige bestimmte Funktion von ω, für welche die beiden Ableitungsgleichungen

2) $\partial V_{(x)} = 0$, 3) $\partial V_{(y)} = 0$

genau dieselben bleiben, wie wenn a und b konstant sind. Man schloß nun, daß, wenn diese Bedingung, welche sich auf

4) $\partial V_{(a)} = 0$ d. h. $\partial V_a + \partial V_b \cdot \partial b_a = 0$

reduzirt*), erfüllt ist, dann das Integral (1.) in dieser neuen Gestalt, nämlich

5) $$V_{x,y,z,a,b_a} = 0,$$

wenn statt a der aus (4.) zu ziehende Werth gesetzt wird, doch noch immer unverändert der Parzialgleichung $F = 0$ genüge, zugleich aber auch eine willkührliche Funktion enthalte, mithin zugleich das allgemeine Integral seyn müsse.

---

iezt folgende geworden

$$\frac{z}{a^2 x} \partial a_\omega + \partial b_\omega = 0;$$

und diese Gleichung lieferte $\omega^2 = -\frac{z}{x}$ oder $z = -x \cdot \omega^2$ welches die Form der allgemeinen Gleichung selber ist, aber ω unbestimmt läßt. In dieser neuen Form der Gleichung $V = 0$ ist aber auch die Konstante b ganz isolirt, so daß $\partial V_b = 1$ seinen Faktor ∂W_ψ bereits verloren hat. Deshalb konnte, dem Ende der (V.) zu Folge, dasmal auch nicht das gewünschte Resultat hervortreten, wenn auch immer ein richtiges sich ergeben mußte.

*) Ist b eine Funktion von a, und a eine Funktion von x und y (die noch z enthalten mag oder nicht), so ist

$$\partial V_{(x)} = \partial V_x + \partial V_z \cdot \partial z_x + \partial V_{(a)} \cdot \partial a_{(x)}$$
$$\partial V_{(y)} = \partial V_y + \partial V_z \cdot \partial z_y + \partial V_{(a)} \cdot \partial a_{(y)}.$$

Man betrachtete daher bisher das System der beiden Gleichungen

5) $V_{x,y,z,a,b_a} = 0$ und 4) $\partial V_a + \partial V_b \partial b_a = 0$

als das allgemeine Integral, und es war dabei nur das noch schwer einzusehen, wie man in jedem Falle verfahren müsse, um aus (5. u. 4.) alles a zu eliminiren, da dieses a nicht bloß außerhalb, sondern auch in den willkührlichen Funktionen b_a, ∂b_a erscheint; obgleich man das Verfahren selbst durch nachstehendes Beispiel, so wie durch ähnliche, in Einzelfällen zu erläutern nicht unterlassen hat.

War nämlich

1) $$V = z - ay - bx = 0$$

das vollständige Integral der Parzialgleichung

2) $$z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y = 0,$$

so hatte man

3) $\partial V_{(a)} = -y - x \cdot \partial b_a = 0$, daraus 4) $\partial b_a = -\frac{y}{x}$.

Man folgerte nun daraus, daß a eine willkührliche Funktion von $\frac{y}{x}$ seyn müsse, aber dann mußte auch b als eine Funktion von $\frac{y}{x}$ angesehen werden. Zuletzt schrieb man für die Gleichung (1.)

5) $$z - x\left(a\frac{y}{x} + b\right) = 0,$$

und setzte statt $a\frac{y}{x} + b$ eine einzige willkührliche Funktion von $\frac{y}{x}$, so daß man zuletzt als allgemeines Integral erhielt

6) $z - x \cdot \psi_\omega = 0$, wo $\omega = \frac{y}{x}$ ist.

In einem andern Beispiel, wo die gegebene Parzialgleichung

1) $$-4x^4 \cdot (z - x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y) + y^2 \cdot (z + x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y)^2 = 0$$

ist, und

2) $$V = z - a^2x^2 - b^2x^3y - a^4y^2 - 2a^2b^2xy^3 - b^4x^2y^4 = 0$$

ein vollständiges Integral derselben, hat man

3) $$\partial V_{(a)} = -(2ax^2 + 4a^3y^2 + 4ab^2xy^3) - (2bx^3y + 4a^2bxy^3 + 4b^3x^2y^4) \cdot \partial b_a = 0,$$

welche Gleichung sich, wenn man durch $2x^3+4a^2y^2+4b^2xy^3$ wegdividirt, auf

$$4) \qquad a+bxy\cdot\partial b_a = 0$$

reduzirt. Da nun b und ∂b_a als Funktionen von a gedacht sind, so enthält die (4.) bloß a und xy, giebt also a als eine willkührliche Funktion von xy; dann ist aber b ebenfalls eine solche, jedoch von der erstern abhängige Funktion von xy, und die Gleichung (2.) giebt daher jetzt

$$5) \qquad z-x^2\cdot(a_\omega^2+b_\omega^2\cdot\omega)-y^2\cdot(a_\omega^2+b_\omega^2\cdot\omega)^2 = 0$$

wo $\omega = xy$ ist, und wo statt $a_\omega^2+b_\omega^2\cdot\omega$ eine beliebige Funktion φ_ω gesetzt werden kann.

Daß wir auf unserm Wege auch diese Form des allgemeinen Integrals erhalten können, erhellet aus dem Nachstehenden.

Da wir nämlich nach (§. 288. III.) aus dem vollständigen Integral

$$1) \qquad V_{x,y,z,a,b} = 0$$

die Form des allgemeinen erhalten können, wenn wir statt a und und statt b beliebige Funktionen von ω setzen; so ist auch, wenn $a = \omega$, $b = \varphi_\omega$ gesetzt wird,

$$2) \qquad V_{x,y,z,\omega,\phi_\omega} = 0$$

die Form des allgemeinen Integrals, zu welcher noch ω gesucht werden muß. Nun hat man aber zur Bestimmung von ω die Gleichung (nach §. 288. V.)

$$3) \qquad \partial V_a\cdot\partial a_\omega+\partial V_b\cdot\partial b_\omega = 0,$$

in welcher statt a und b beliebige Funktionen von ω gesetzt werden können. Setzt man daher $a = \omega$ und $b = \varphi_\omega$, so geht die Gleichung zur Bestimmung von ω über in

$$4) \qquad \partial V_\omega+\partial V_\phi\cdot\partial\varphi_\omega = 0.$$

Bestimmt man also aus (4.) die Funktion ω, und setzt man diesen Werth in (2.) statt ω, d. h. eliminirt man aus (2. u. 4.) dieses ω; so hat man das allgemeine Integral, und dies ist genau die bisher bekannte Form.

Da nach unserer Ansicht die Gleichung (2.) schon ω liefert, wenn man statt a und b irgend welche bestimmte Funktionen von ω setzt; so kann man die Gleichung zur Bestimmung von ω viel einfacher nehmen, als die (4.), welche eine willkührliche Funktion φ_ω von ω und noch ihre Ableitung enthält, und so zwar daß die Funktion φ_ω willkührlich bleiben muß, weil es dieselbe ist, welche die Gleichung (2.) zum allgemeinen Integral macht. Da wir ferner nach unsern hier mitgetheilten Ansichten schon die Form des allgemeinen Integrals finden, wenn wir in dem vollständigen Integral (1.) o statt b und ψ_ω statt a, oder o statt a und φ_ω statt b schreiben; so erhalten wir statt der Gleichung (2.) entweder

$$5)\quad V_{x,y,z,\psi_\omega,o} = 0 \quad \text{oder} \quad 6)\quad V_{x,y,z,o,\varphi_\omega} = 0,$$

wodurch in der Regel das allgemeine Integral sogleich eine viel einfachere Gestalt annimmt, ja leicht sogleich die einfachste Gestalt annehmen kann. Endlich dürfte der Vorzug unserer Methoden gegen die bisher bekannte besonders noch darin zu suchen seyn, daß wir gerade jede Form des allgemeinen Integrals mit gleicher Leichtigkeit hinschreiben, diese Formen nach Belieben abändern, irgend einem gegebenen Zwecke entsprechend umformen können, und dasselbe hinsichtlich der Gleichung gilt, welche wir zur Bestimmung von ω erhalten. Auch war es bisher gänzlich unbekannt, daß man schon aus einem ausreichenden Integral (d. h. aus einem besondern Integral mit nur einer einzigen willkührlichen Konstante) das allgemeine Integral herstellen kann, wie wir solches (§. 287.) gezeigt haben.

Um das Beispiel (S. **Lagrange Léçons etc. 1806. Lec. XX. p. 377.**)

$$1)\qquad z = x\cdot z_1 + y\cdot_1 z + f_{z_1,1z}$$

nach dem bisher bekannten Verfahren zu integriren, mußte man sich das vollständige Integral

$$2)\qquad z = ax + by + f_{a,b}$$

verschaffen, und dann aus den Gleichungen

3) $z = x \cdot \omega + y \cdot \varphi_\omega + f_{\omega,\varphi}$ und $o = x + y \cdot \partial\varphi_\omega + \partial f + \partial f_\varphi \cdot \partial\varphi_\omega$

ω eliminiren. Nach unserer Methode verschaffen wir uns entweder ebenfalls das vollständige Integral (2.), oder aber, welches offenbar viel leichter ist, (indem wir versuchen, ob nicht z nach y konstant, also $z = 0$ seyn könne, und die Gleichung

4) $z = x \cdot z_1 + f_{z_1,o}$

nach §§. 265. 266.) integriren) bloß das ausreichende Integral

5) $z = a \cdot x + f_{a,o}$,

wozu sich dann auf demselben Wege sogleich das andere ausreichende Integral

6) $z = by + f_{o,b}$

gesellt. Dann nehmen wir zum allgemeinen Integral entweder

7) $z = x \cdot \psi_\omega + f_{\psi_\omega,o}$ oder 8) $z = y \cdot \varphi_\omega + f_{o,\varphi_\omega}$,

und bestimmen nun noch ω dazu. Dieses ω verschaffen wir uns entweder nach (§. 287. I. II.) oder aus dem vollständigen Integral

9) $z = ax + by + f_{a,b}$,

welches aus der vereinigten Betrachtung der beiden ausreichenden Integrale (5. u. 6.) bald erkannt wird), indem wir aus (9.)

10) $x \cdot \partial a_\omega + y \cdot \partial b_\omega + \partial f_a \cdot \partial a_\omega + \partial f_b \cdot \partial b_\omega = 0$

erhalten, und nun statt a_ω und b_ω ganz einfache und völlig bestimmte, aber von uns für jeden Einzelfall noch zweckgemäß zu nehmende Funktionen von ω setzen.

Anmerkung 2. Lagrange in dem angeführten Werke (Lec. XX.) äußert sich dahin, daß, wenn man das allgemeine Integral aus einem vollständigen Integral

$V_{x,y,z,a,b} = 0$ und $\partial V_a + \partial V_b \cdot \partial b_a = 0$

(durch Elimination von a, während b eine willkührliche Funktion von a vorstellt) nach der vorstehenden (Anmerk. 1.) erhalten habe, dann in diesem allgemeinen Integral dasjenige vollständige Integral $V = 0$, von welchem man ausgegangen ist, nicht als ein besonderes Integral enthalten sey. Er beweist dies zuerst durch ein Beispiel. Er geht von dem vollständigen Integrale

1) $z = a \cdot x + b \cdot y$

aus, und erhält das System der beiden Gleichungen

2) $z = a \cdot x + b_a \cdot y$ und $x + y \cdot \partial b_a = 0$

(unter b_a eine willkührliche Funktion von a gedacht) als das allgemeine Integral. Nun sagt er: Stäke in diesem allgemeinen Integral das vollständige

3) $z = A \cdot x + B \cdot y,$

so müßte dieser Werth von z, in (2.) subsstituirt, zur Bestimmung von b_a führen. Er subsstituirt daher, erhält

4) $A \cdot x + B \cdot y = a \cdot x + b_a \cdot y$ und $x + y \cdot \partial b_a = 0,$

und zieht aus diesen beiden Gleichungen, durch Elimination von x,

5) $(a - A) \cdot \partial b_a = b_a - B,$

woraus er dann $\frac{\partial b}{b_a - B} = \frac{1}{a - A}$ erhält, also auch

$$\int \frac{1}{b - B} \cdot db = \int \frac{1}{a - A} \cdot da$$

d. h. $log.(b - B) = log.(a - A) + log.$ Const.

oder 6) $b_a = B + c \cdot (a - A),$

wo c eine willkührliche Konstante ist. Diese bestimmte Funktion $B + c \cdot (a - A)$ müßte man also statt b_a in das allgemeine Integral (2.) subsstituiren, wenn man Hoffnung haben wollte, aus demselben das besondere Integral $z = Ax + By$ erhalten zu können. Subsstituirt man aber diese Funktion $B + c(a - A)$ wirklich statt b_a in (2.); so erhält man, wie Lagrange sagt, die Gleichungen $(a - A) \cdot (x + cy) = 0$ und $x + cy = 0$, (aux quelles on ne peut satisfaire, qu'en faisant $x + cy = 0$, cequi ne donne rien).

Der Grund dieses Irrthums des Lagrange, der von seinen Nachfolgern wiederholt wird, ist offenbar in der unbequemen und einseitigen Form seines allgemeinen Integrals zu suchen. Es ist allerdings beiden Gleichungen (4.) durch eine schickliche Bestimmung der willkührlichen Funktion b_a zu genügen: denkt man sich aber a und b selber wieder als Funktionen eines dritten, etwa v; so hat man

$$\partial b_a = \frac{\partial b_\nu}{\partial a_\nu},$$

und die zweite Gleichung (4.) nimmt dann die Gestalt

$$x \cdot \partial a_\nu + y \cdot \partial b_\nu = 0$$

an, und ihr wird nun genügt durch

$\partial a_\nu = 0$, $\partial b_\nu = 0$, d. h. $a =$ Const. und $b =$ Const.,

d. h. durch die Annahme, daß b eine ganz willkührliche, formlose Funktion von a ist, so daß ∂b_a noch ganz unbestimmt bleibt, und als $\frac{0}{0}$ in der Rechnung erscheint. Dann muß noch der ersten Gleichung in (4.) genügt werden; welche sogleich $a = A$ und $b_a = B$ giebt; so daß durch diese Werthe von a und b beiden Gleichungen zugleich genügt ist. — Daß a konstant wird, darf uns nicht wundern, da a der obigen Theorie zufolge, eine Funktion von ω seyn muß, also recht gut $= A \cdot \omega^0$ genommen werden kann. Ferner genügen diese so eben gefundenen Werthe auch der Differenzialgleichung in (5.), aber nicht als Integral, wie Lagrange wollte, sondern als singulärer Werth, welcher $\partial^2 b_a$ auf die Form $\frac{0}{0}$ bringt.

§. 289. Zusatz.

A. β) Von den singulären Werthen einer Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen.

Betrachten wir zuletzt noch die singulären Werthe.

I. Die singulären Werthe werden nach dem (§. 283. und seiner Anmerkung) erhalten, wenn man aus

$$F = 0, \quad \partial F_{(x)} = 0, \quad \partial^2 F_{(x)} = 0, \quad \partial^3 F_{(x)} = 0, \text{ ꝛc.}$$

die Ableitungen ∂z_x, $\partial^2 z_x$, $\partial^3 z_x$, $\partial^4 z_x$ ꝛc. alle in x, y, z, ∂z_y, $\partial^2 z_y$, $\partial^3 z$, $\partial^4 z_y$ ꝛc. ausgedrückt*) findet, etwa

*) Man vergl. die Note zu (§. 283. Anmerk.)

$$\partial z_x = \pi_1, \quad \partial^2 z_x = \pi_2, \quad \partial^3 z_x = \pi_3, \quad \cdots \quad \partial^a z_x = \pi_a,$$

wo π_a eine Zusammensetzung aus x, y, z, ∂z_y, $\partial^2 z_y$, $\cdots$ bis incluſ. $\partial^a z_y$ ist; — dann aber, wenn solches angeht, den Zähler und Nenner eines jeden dieser Ausdrücke, z. B. des Ausdrucks π_a*), einzeln der Null gleich setzt, diesen beiden Gleichungen (welche bloß Ableitungen von z nach dem einzigen unabhängigen Veränderlichen y enthalten, mithin zu denen im vorhergehenden Kapitel behandelten gewöhnlichen Differenzialgleichungen gehören, wo also x als konstant betrachtet wird) durch die entsprechenden Werthe $z = z_{x,y}$ zu genügen sucht; dann aber noch nachsieht, ob diese Werthe $z_{x,y}$ erstlich der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ genügen, und dann noch zweitens auch wirklich nicht in dem allgemeinen Integral

$$y = f_{x,y,\psi_\omega}$$

(für keine Form von ψ) enthalten sind.

II. Ob aber ein Werth

1) $$z = z_{x,y}$$

in dem allgemeinen Integral

2) $$z = f_{x,y,\psi_\omega}, \quad \text{wo} \quad \omega = \omega_{x,y,z} \quad \text{ist},$$

enthalten sey oder nicht, erkennt man daran, daß man diesen Werth $z_{x,y}$ statt des nicht in ω befindlichen z in (2.) substituirt, und aus der entstehenden Gleichung

3) $$z_{x,y} = f_{x,y,\psi}$$

den Buchstaben ψ findet (in x und y ausgedrückt), etwa

4) $$\psi = \psi_{x,y}.$$

**) Es kann bewiesen werden, daß man die singulären Werthe alle schon erhält, wenn nur π_1 und π_2 auf die Form $\frac{0}{0}$ gebracht werden, und daß man daher aus $\pi_3 = \frac{0}{0}$, $\pi^4 = \frac{0}{0}$ ꝛc. keine neuen singulären Werthe mehr zieht.

Ist nun dieser Ausdruck $\psi_{x,y}$ wirklich eine Funktion des (bekannten) $\omega_{x,y,z}$, wenn auch hier statt z der obige Werth $z_{x,y}$ gesetzt worden ist; so ist der Werth (1.) in dem allgemeinen Integral (2.) enthalten, also ein besonderes Integral und kein singulärer Werth: ist aber nachzuweisen, daß $\psi_{x,y}$ durchaus keine Funktion des bekannten $\omega_{x,y,z}$ (wo $z = z_{x,y}$ gedacht ist) seyn kann*); so ist $z = z_{x,y}$, wenn solcher Werth der Gleichung $F = 0$ wirklich genügt, allemal ein singulärer Werth von $F = 0$.

III. Man kann aber auch singuläre Werthe dadurch finden, daß man aus

$$F = 0, \quad \partial F_{(y)} = 0, \quad \partial^2 F_{(y)} = 0, \text{ ꝛc.}$$

die Ableitungen $\partial z_y, \partial^2 z_y, \partial^3 z_y$ ꝛc. in $x, y, z, \partial z_x, \partial^2 z_x, \partial^3 z_x$ ꝛc. ausdrückt, jeden dieser Ausdrücke $= \frac{0}{0}$ (d. h. Zähler und Nenner desselben Ausdrucks einzeln $= 0$) setzt; die Werthe $z = z_{x,y}$ aufsucht, welche diesen beiden Gleichungen genügen, und nachsieht, ob solche auch $F = 0$ identisch machen, und dabei in dem allgemeinen Integral wirklich nicht enthalten sind**)

Es sey z. B. gegeben die Parzialgleichung der ersten Ordnung

1) $F = -8x^4z + 4x^5 \cdot \partial z_x - 4x^4y \cdot \partial z_y + y^2(2z + x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y)^2 = 0,$

deren allgemeines Integral

2) $z = f_{x,y,\psi} = x^2 \cdot \psi_\omega + y^2 \cdot \psi_\omega^2$ ist, wenn $\omega = x \cdot y$.

Die Gleichung $\partial F_{(x)}$ wird nun

---

*) Man darf nur aus $\omega = \omega_{x,y,z}$, wo $z = z_{x,y}$ gedacht ist, x in ω und y ausdrücken, und diesen Werth in $\psi_{x,y}$ (aus 4.) substituiren. Fällt dann y von selbst weg, so wird $\psi_{x,y}$ bloß eine Funktion von ω; fällt aber nicht y von selbst weg, so ist auch $\psi_{x,y}$ keine Funktion von dem bekannten und gegebenen ω.

*) Es läßt sich aber zeigen, daß man auf diesem Wege keine anderen singulären Werthe mehr bekommt außer denen, die schon der Weg (I.) geliefert hat.

3) $-32x^3z+20x^4\cdot\partial z_x+4x^5\cdot\partial^2 z_x-16x^3y\cdot\partial z_y-4x^4y\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}+$

$+y^2(4z+2x\partial z_x-2y\partial z_y)\cdot(3\partial z_x+x\cdot\partial^2 z_x-y\cdot\partial^{1,1}z_{x,y})=0,$

und giebt, in Verbindung mit $F=0$ sogleich $\partial^2 z_x$ in x, y, z, ∂z_y, $\partial^2 z_y$ ausgedrückt, wenn man, um $\partial^{1,1}z_{x,y}$ zu eliminiren, noch die Gleichung $\partial F_{(y)}$ d. h. die Gleichung

4) $-12x^4\cdot\partial z_y+4x^5\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}-4x^4y\cdot\partial^2 z_y+2y(2z+x\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y)^2+$

$+2y^2\cdot(2z+x\partial z_x-y\cdot\partial z_y)(\partial z_y+x\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}-y\cdot\partial^2 z_y)=0$

zur Hülfe nimmt. Eliminirt man nun aus (3. u. 4) $\partial^{1,1}z_{x,y}$, so ergiebt sich

5) $$\partial^2 z_x=\frac{8x^4z-2x^5\cdot\partial z_x+10x^4y\cdot\partial z_y+2x^4y^2\cdot\partial^2 z_y}{2x^6+x^2y^2\cdot(2z+x\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y)}-$$

$$-\frac{y^2(2z+x\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y)(3x\cdot\partial z_x+y\cdot\partial z_y-y^2\cdot\partial^2 z_y)}{2x^6+x^2y^2\cdot(2z+x\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y)},$$

wo man jedoch statt ∂z_x überall seinen aus $F=0$ d. h. aus der Gleichung (1.) gezogenen Werth (in x, y, z, ∂z_x ausgedrückt) gesetzt denken muß.

Wird nun der Zähler und der Nenner dieses Ausdruckes für $\partial^2 z_x$ (in 5.) jeder für sich einzeln $=0$ gesetzt; so hat man zwei Gleichungen (in welchen jedoch statt ∂z_x der aus (1.) zu ziehende Werth gedacht werden muß) zwischen y, z, ∂z_y, von denen die erstere auch noch $\partial^2 z_y$ enthält. Die zweite dieser Gleichungen, nämlich

6) $$2x^6+x^2y^2\cdot(2z+\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y)=0,$$

geht aber sogleich in

7) $$z=-\frac{x^4}{4y^2}$$

über, und dieser Werth von z genügt nicht bloß der erstern (d. h. macht nicht bloß den Zähler in (5.) wirklich der Null gleich), sondern er genügt auch der Gleichung (1.) oder $F=0$; ist also entweder ein besonderes Integral oder ein singulärer Werth von $F=0$.

Verfährt man nun weiter nach (II.), d. h. setzt man diesen Werth von z aus (7.) statt z in das allgemeine Integral (2.), so erhält man

8) $$-\frac{x^4}{4y^2}=x^3\cdot\psi+y^2\cdot\psi^2,$$

und daraus

9) $$\psi = -\frac{x^2}{2y};$$

und da dieser Werth gewiß keine Funktion von ω (nämlich vom Produkt $x \cdot y$) ist*); so zeigt dieses Resultat, daß der Werth von z aus (7.) wirklich ein singulärer Werth von $F = 0$ ist, und kein besonderes Integral.

IV. Giebt man dem allgemeinen Integral eine schickliche Form, wie wir solche bei den singulären Werthen des vorhergehenden Kapitels (§§. 270. 275. u. 289.) näher bezeichnet haben, hier aber bloß andeuten wollen, um nicht zu weitläuftig zu werden; so kann man, im Falle ein singulärer Werth von $F = 0$ existirt, solchen auch aus dem allgemeinen Integral

1) $$z = f_{x,y,\psi} \quad \text{oder} \quad W_{x,y,\psi,z} = 0$$

ableiten. Man muß sich nämlich in dieser Form des allgemeinen Integrals ψ als diejenige Funktion von ω und y denken, für welche die Gleichungen zur Bestimmung von ∂z_x und ∂z_y, nämlich

2) $$\partial W_x + \partial W_\psi \cdot \partial \psi_\omega \cdot \partial \omega_{(x)} + \partial W_z \cdot \partial z_x = 0$$

und

3) $$\partial W_y + \partial W_\psi \cdot \partial \psi_\omega \cdot \partial \omega_{(y)} + \partial W_z \cdot \partial z_y = 0,$$

der Form nach genau dieselben bleiben, wie wenn ψ eine Funktion von ω allein wäre. Ist aber ψ eine Funktion $\psi_{\omega,y}$ von ω und y, so erhält die Gleichung (3.) noch das Glied

$$\partial W_\psi \cdot \partial \psi ,$$

welches also $= 0$ gesetzt werden muß, um den vorgesetzten Zweck zu erreichen. Denkt man sich daher in dem allgemeinen Integral

---

*) Da nämlich aus $\omega = x \cdot y$ jetzt $x = \frac{\omega}{y}$ folgt, so erhält man aus (9.), wenn dieser Werth ω statt x gesetzt wird,

$$\psi = -\frac{y\omega^2}{2y^4};$$

also ist ψ aus (9.) keine Funktion von ω allein, d. h. aus dem allgemeinen Integral (2.) geht der Werth (7.) nur dann hervor, wenn statt ψ jetzt $-\frac{\omega^2}{2y^4}$, also nicht hervor, wenn statt ψ eine Funktion von ω allein gesetzt wird.

1) $$W_{x,y,\psi,z} = 0$$

ψ als diejenige Funktionen von ω und y, welche

4) $$\partial W_\psi \cdot \partial \psi_y \quad \text{d. h.} \quad \partial W_\psi = 0$$

macht, d. h. eliminirt man ψ aus (1. u. 4.), so erhält man sogleich den singulären Werth*).

In dem vorliegenden Beispiele ist $W = 0$ jetzt

10) $$z - x^2 \cdot \psi - y^2 \cdot \psi^2 = 0,$$

also $\partial W_\psi = 0$ jetzt

11) $$-x^2 - 2y^2 \cdot \psi = 0 \quad \text{d. h.} \quad \psi = -\frac{x^2}{2y^2},$$

und dieser Werth von ψ in (10.) substituirt, giebt

12) $$z + \frac{x^4}{4y^2} = 0 \quad \text{d. h.} \quad z = -\frac{x^4}{4y^2}$$

zum singulären Werth, welches derselbe ist, der oben ebenfalls gefunden worden.

V. Aber auch aus jedem der unzählig vielen besondern, jedoch vollständigen Integrale (mit 2 willkührlichen Konstanten a und b)

1) $$V_{x,y,z,a,b} = 0,$$

kann man den singulären Werth von $F = 0$ erhalten, wenn ein solcher existirt, sobald ihm nur die dazu schickliche Form gegeben ist, namentlich die Form, in welcher er sich nicht nach einer der Konstanten aufgelöst findet, d. h. in welcher keine der Konstanten isolirt steht. Man muß nämlich a und b als solche Funktion von x und y sich denken, daß die (1.) und ihre beiden Ableitungsgleichungen

2) $$\partial V_{(x)} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial V_x + \partial V_z \cdot \partial z_x = 0$$

und

3) $$\partial V_{(y)} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial V_y + \partial V_z \cdot \partial z_y = 0$$

---

*) Man sieht leicht, daß man in diesem ganzen Verfahren auch ψ als eine Funktion von ω und x sich hätte denken können, statt daß wir ψ oben als eine Funktion von ω und y gedacht haben.

genau dieselben bleiben, der Form nach, wie wenn a und b konstant sind, welches dann der Fall ist, wenn

$$4) \quad 0 = \partial V_a \cdot \partial a_x + \partial V_b \cdot \partial b_x = 0$$

und $$5) \quad \partial V_a \cdot \partial a_y + \partial V_b \cdot \partial b_y = 0,$$

also wenn

$$6) \quad \partial V_a = 0 \quad \text{und} \quad 7) \quad \partial V_b = 0$$

ist, weil man dann, wenn aus (1. 2. 3.) a und b eliminirt werden, sie mögen konstant oder Funktionen von x und y seyn, doch allemal zur gegebenen Parzialgleichung $F = 0$ wieder gelangt; so daß die Gleichung (1.), wenn auch a und b die durch die Gleichungen (6. und 7.) gegebenen Funktionen von x und y vorstellen, doch wiederum der gegebenen Parzialgleichung $F = 0$ genügt. Weil aber Funktionen von x und y auch Funktionen von ω seyn können, und weil, wenn statt a und b Funktionen von ω gesetzt werden, das Integral dann allemal wiederum ein besonderes seyn muß, nach (§. 288. III.); so wird dieses Verfahren, statt eines singulären Werthes, auch ein besonderes Integral liefern können.

Setzt man z. B. in dem allgemeinen Integral

$$13) \quad z - x^2 \cdot \psi_\omega - y^2 \cdot \psi_\omega^2 = 0, \quad \text{wo} \quad \omega = xy \quad \text{ist},$$

jetzt $a + b\omega$ statt ψ_ω, um das besondere aber vollständige Integral

$$14) \quad V = 0 = z - ax^2 - bx^3y - a^2y^2 - 2abxy^3 - b^2x^2y^4$$

zu erhalten; so hat man, statt $\partial V_a = 0$, jetzt

$$15) \quad 0 = -x^2 - 2y^2a - 2xy^3b,$$

und statt $\partial V_b = 0$ jetzt

$$16) \quad 0 = -x^3y - 2xy^3a - 2x^2y^4b.$$

Findet man nun aus diesen Gleichungen (15. und 16) sowohl a als auch b; so zeigt sich, daß diese Gleichungen nicht von einander verschieden sind, nur eine einzige ausmachen, also nur b in a geben, nämlich

$$17) \quad b = -\frac{x^2 + 2y^2a}{2xy^3}.$$

Setzt man aber diesen Werth statt b in das vollständige Integral (14.), so hebt sich a von selbst weg, und man erhält

18) $$z + \frac{x^4}{4y^2} = 0$$

als Endresultat, welches, wie man sieht, abermals der schon öfter gefundene singuläre Werth von $F = 0$ ist.

VI. Es ist auch nicht schwer, das Resultat (IV.) aus dem (V.) abzuleiten oder umgekehrt. Da nämlich aus dem allgemeinen Integral

1) $$W_{x,y,\psi,z} = 0$$

jedes vollständige

2) $$V_{x,y,z,a,b} = 0$$

dadurch erhalten wird, daß man statt ψ irgend eine bestimmte Funktion von a, b und ω setzt; so kann man nach (§. 288. V.) der Gleichung $V = 0$ allemal die Form geben, daß W zu gleicher Zeit V, also

3) $$\partial V_a = \partial W_a = \partial W_\psi \cdot \partial \psi_a$$

4) $$\partial V_b = \partial W_b = \partial W_\psi \cdot \partial \psi_b$$

ist, so daß die Gleichungen $\partial V_a = 0$, $\partial V_b = 0$ durch die einzige

5) $$\partial W_\psi = 0$$

erfüllt werden. Also hat das Verfahren (IV.) das in (V.) beschriebene nothwendig zur Folge.

VII. Es fragt sich aber noch, ob, wenn den Gleichungen (3. und 4.) dadurch genügt wird, daß man

6) $\partial \psi_a = 0$ und 7) $\partial \psi_b = 0$

nimmt, dies zu einem neuen singulären Werth führt, den das Verfahren (IV.), nach welchem $\partial W_\psi = 0$ genommen wird, nicht giebt. — Weil indeß die Gleichungen (6. und 7.) offenbar a und b bloß in ω ausgedrückt geben, also a und b zu Funktionen von ω machen; so ist dann auch $\psi_{a,b,\omega}$ eine bloße Funktion von ω, und aus

1) $$W_{x,y,\psi,z} = 0$$

geht daher jetzt, wenn man für a und b die aus (6. und 7.)

gefundenen Werthe setzt, offenbar kein singulärer Werth, sondern ein besonderes Integral hervor.

Was daher in dem Beispiele zu (V.) bloß Zufall zu seyn schien, daß nämlich die zwei Gleichungen $\partial V_a = 0$ und $\partial V_b = 0$ in eine einzige zusammenfallen, muß gerade allemal so werden, wenn man auf diesem Wege (V.) den singulären Werth wirklich erhalten will.

Das Verfahren (V.), durch welches aus dem besonderen aber vollständigen Integral

$$\alpha) \qquad V_{x,y,z,a,b} = 0$$

der singuläre Werth gefunden werden soll, muß daher bestimmter so ausgesprochen werden:

Man leite aus V zunächst ∂V_a und ∂V_b ab, suche den diesen beiden Ableitungen gemeinschaftlichen Faktor $\varphi_{x,y,z,a,b}$, setze solchen $= 0$, so daß man

$$\beta) \qquad \varphi_{x,y,z,a,b} = 0$$

erhält, und eliminire aus (α. und β.) die Konstante b oder die Konstante a. Die andere Konstante wird dann von selbst wegfallen, und das Resultat ist der gesuchte singuläre Werth.

Wollte man also nach Lagrange (leçons sur le calcul des fonct. 1806. leç. XX. p. 369.) aus $V_{x,y,z,a,b} = 0$ und $\partial V_a = 0$, $\partial V_b = 0$ a und b elimininiren, so würde man leicht durch den, dem ∂V_a und ∂V_b gemeinschaftlichen Faktor, welcher, der Null gleichgesetzt, allein den singulären Werth giebt, wegdividiren, und dann allemal den singulären Werth verfehlen, und entweder gar nichts oder doch ein besonderes Integral erhalten.

VIII. Allein man kann den singulären Werth auch schon aus jedem ausreichenden Integral, d. h. aus jedem Integral mit einer einzigen willkührlichen Konstante

$$1) \qquad V_{x,y,z,a} = 0$$

finden. Denkt man sich nämlich hier a als diejenige Funktion von x und y, für welche

$$\partial V_a \cdot \partial a_x \quad \text{und} \quad \partial V_a \cdot \partial a_y$$

Null werden, nimmt man also a so, daß

$$2) \qquad \partial V_a = 0$$

wird; so sind die Gleichungen

$$V = 0, \quad \partial V_{(x)} = 0, \quad \partial V_{(y)} = 0$$

der Form nach dieselben, genügen also immer noch der gegebenen Parzialgleichung $F = 0$, es mag a konstant oder eine Funktion von x und y seyn. Also darf man nur aus $V = 0$ und $\partial V_a = 0$ die Konstante a eliminiren, und man wird den singulären Werth erhalten.

Dasselbe Verfahren giebt natürlich auch den singulären Werth, wenn $V = 0$ ein vollständiges Integral seyn sollte, weil solches allemal doch zugleich auch als ein ausreichendes anerkannt werden muß, da die übrigen willkührlichen Konstanten alle unberücksichtigt bleiben können.

Hat man z. B. von obiger Parzialgleichung

$$1) \qquad -4x^4 \cdot (2z - x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y) + y^2 (2z + x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y)^2 = 0$$

das ausreichende Integral

$$2) \qquad z = ax^2 + a^2 y^2$$

gefunden, so ergiebt sich jetzt für $\partial V_a = 0$ die Gleichung

$$3) \qquad 0 = x^2 + 2ay^2.$$

Eliminirt man daher a aus den Gleichungen (2. und 3.), so erhält man

$$4) \qquad z = -\frac{x^4}{4y^2},$$

welches abermals der schon öfter gefundene singuläre Werth ist.

Weil aber das ausreichende Integral

$$V_{x,y,z,a} = 0$$

bereits in dem allgemeinen Integral

$$W_{x,y,\psi,z} = 0$$

vorgestellt ist, sobald man unter ψ eine bestimmte Funktion von a und ω sich denkt, so ist

$$\partial V_a = \partial W_a = \partial W_\psi \cdot \partial \psi_a .$$

Weil ferner $\partial \psi_a = 0$, a in ω geben, also $V = 0$ zu einem besonderen Integrale machen würde, so liefert $\partial V_a = 0$ nur deshalb den verlangten singulären Werth, weil sie diese andere

$$\partial W_\psi = 0$$

vorstellt; und so sieht man wiederum, daß es einerlei ist, ob man aus $V = 0$ und $\partial V_a = 0$ a eliminirt, oder ob man aus $W = 0$ und $\partial W_\psi = 0$ das Zeichen ψ eliminirt. — Durch diese Betrachtung ist aber zwischen den bisher bekannten Verfahrungsarten, durch welche man zu dem singulären Werth gelangt ist, und der jetzigen der Zusammenhang nachgewiesen.

Anmerkung. Dem vorliegenden Paragraphen zu Folge kann man also den singulären Werth finden:

1) direkt aus der gegebenen Parzialgleichung,
2) aus dem allgemeinen Integral derselben,
3) aus jedem ausreichenden (daher auch aus einem vollständigen) besondern Integral,

wenn man nur in (N. 2. u. 3.) der Integralgleichung die dazu schickliche Form giebt, damit die gemachten Voraussetzungen wirklich alle erfüllt werden. Ohne diese Form, um nicht zu weitläufig zu werden, näher zu bezeichnen, haben wir doch bemerklich gemacht, daß sie die rechte seyn wird, wenn sie möglichst wenige indirekte Operationszeichen enthält, und daß man namentlich die Gleichung nicht nach einer der Konstanten auflösen, d. h. die Form der Gleichung nicht so wählen dürfe, daß eine der Konstanten isolirt stehe.

Ferner machen wir hier noch bemerklich, daß die Theorie der singulären Werthe hier noch vollständiger und gründlicher vorgetragen werden kann, sobald man Wege betritt, welche den in den (§§. 270. 275. 280.) befolgten analog sind. Das Vorstehende wird aber für unsern gegenwärtigen Zweck ausreichend seyn.

Endlich ist es bisher unbekannt gewesen, daß man aus einem besonderen Integral mit einer einzigen willkührlichen Konstante

den singulären Werth finden könne; so wie sich der Verfasser auch nicht erinnert, irgendwo gesehen zu haben, wie aus dem allgemeinen Integral der singuläre Werth direkt erhalten werden könne, nämlich so wie dies in (IV.) gezeigt worden ist.

B. β) Von den Integralien einer Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen vier Veränderlichen, von denen drei als unabhängig von einander angesehen sind.

§. 290. Aufgabe.

Es ist eine Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen einer Funktion u von 3 unabhängig Veränderlichen x, y, z, deren Ableitungen ∂u_x, ∂u_y, ∂u_z (welche beziehlich durch u_1, $_1u$ und u' bezeichnet seyn mögen), und den unabhängigen Veränderlichen x, y, z selbst gegeben: man soll alle Funktionen $u_{x,y,z}$ finden, welche dieser Gleichung entsprechen.

Auflösung. Bezeichnet man die gegebene Gleichung wiederum durch

1) $$F_{x,y,z,u,u_1,{}_1u,u'} = 0,$$

und sucht man wieder alle u in Form einer nach

2) $$x - \alpha = \varkappa$$

fortlaufenden unendlichen Reihe

3) $u_\varkappa$ oder $\delta^0 u + \delta u \cdot \varkappa + \delta^2 u \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 u \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$;

so sieht man sich gezwungen, diese Reihe statt u, ihre Ableitungen nach x, y, z, nämlich

4) $(u_1)_\varkappa$ oder $\delta^0 u_1 + \delta u_1 \cdot \varkappa + \delta^2 u_1 \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 u_1 \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$,

wo 5) $$\delta^a u_1 = \delta^{a+1} u$$ ist,

6) $({}_1u)_\varkappa$ oder $\delta^0{}_1u + \delta{}_1u \cdot \varkappa + \delta^2{}_1u \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3{}_1u \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$,

wo 7) $$\delta^a{}_1u = \partial(\delta^a u)_y$$ ist,

endlich

8) $(u')_x$ oder $\delta^0 u' + \delta u' \cdot x + \delta^2 u' \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 u' \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

wo 9) $\delta^a u' = \partial(\delta^a u)_z$ ist,

so wie noch

10) x_x d. h. $\delta^0 x + \delta x \cdot x + \delta^2 x \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$

wo 11) $\delta^0 x = \alpha$, $\delta x = 1$, $\delta^2 x = \delta^3 x = \text{ꝛc.} = 0$

ist, in

$$F_{x,y,z,u,u_1,{}_1u,u'} = 0,$$

beziehlich statt u_1, ${}_1u$, u' und x zu substituiren; das was aus $F = 0$ dann wird, auf die Form

$$F_x = 0 \quad \text{oder} \quad \delta^0 F + \delta F \cdot x + \delta^2 F \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 F \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots = 0$$

zu bringen; dann aber, damit die Gleichung für jedes x (d. h. für jedes x) identisch werde, die einzelnen Koeffizienten $\delta^0 F$, δF, $\delta^2 F$, ꝛc. $= 0$ zu setzen, um die Gleichungen zu erhalten, welche zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten $\delta^0 u$, δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, ꝛc. der für das gesuchte u angenommenen Reihe u_x dienen. Alles ganz analog dem Verfahren der (§§. 265. 271. 276. und 283.). Wendet man nun, um $\delta^0 F$, δF, $\delta^2 F$, ꝛc. in $\delta^0 u$, δu, $\delta^2 u$, ꝛc. $\delta^0 u_1$, δu_1, $\delta^2 u_1$ ꝛc. $\delta^0 {}_1u$, $\delta {}_1u$ ꝛc. $\delta^0 u'$, $\delta u'$, ꝛc., so wie noch in $\delta^0 x$ oder α und δx oder 1 auszudrücken, die Methode des (§. 253.) an; setzt man dann statt der Koeffizienten der Reihen $(u_1)_x$, $({}_1u)_x$ und $(u')_x$ mittelst der Gleichungen (5. 7. 9.) ihre Ausdrücke in $\delta^0 u$, δu, $\delta^2 u$, ꝛc.: so findet man, daß $\delta^0 u$ (als eine Funktion von y und z) ganz willkührlich bleibt, dagegen δu, $\delta^2 u$, ꝛc. in $\delta^0 u$ und deren Ableitungen nach y und z sich ausdrücken lassen. Man findet daher zuletzt alle gesuchten u in der Gleichung

11) $u = \delta^0 u + \delta u \cdot \frac{x-\alpha}{1} + \delta^2 u \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \delta^3 u \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots$

ausgedrückt, wo $\delta^0 u$ eine ganz willkührliche Funktion von y und z vorstellt, während δu, $\delta^2 u$, ꝛc. in $\delta^0 u$ und deren Ableitungen

nach y und nach z ausgedrückt sind. Die Gleichung (11.), welche alle u enthält, nennt man daher abermals das allgemeine Integral, neben welchem jedoch wieder singuläre Werthe existiren können.

Anmerkung. Da jedes so gefundene u, nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufend, auch allemal nach dem Maclaurin'schen Lehrsatz

$$(\delta)\cdots \quad u = [u_x]_\alpha + [\partial u_x]_\alpha \cdot \frac{x-\alpha}{1} + [\partial^2 u_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$$

geschrieben werden kann, so folgt, daß

$$[u_x]_\alpha = \delta^0 u, \quad [\partial u_x]_\alpha = \delta u, \quad [\partial^2 u_x]_\alpha = \delta^2 u,$$

u. s. w. f., also allgemein

$$[\partial^a u_x]_\alpha = \delta^a u \qquad \text{ist.}$$

Setzt man daher in $\delta^a u$, statt α überall x, so erhält man $\partial^a u_x$ in x, y, z, u, und den Ableitugen von u nach y und z bis zur aten Ordnung hin.

Dasselbe erhält man aber direkt, wenn man aus

$$F=0, \quad \partial F_{(x)}=0, \quad \partial F_{(y)}=0, \quad \partial F_{(z)}=0, \quad \partial^2 F_{(x)}=0, \text{ ꝛc.}$$

zunächst $\partial^{1,1} u_{x,y}$, $\partial^{1,1} u_{x,z}$, ꝛc. eliminirt, und dann ∂u_x, $\partial^2 u_x$, ꝛc. findet.

Geschieht daher letzteres direkt, so hat man ∂u_x, $\partial^2 u_x$, ꝛc. d. h. $\partial^a u_x$ so ausgedrückt, daß man nur noch α statt x zu setzen braucht, um δu, $\delta^2 u$, ꝛc. d. h. $\delta^a u$ zu haben, gerade so, wie solches in dem gefundenen allgemeinen Integral (11.) erscheint. Denkt man sich also diese Ausdrücke unter $[\partial^a u_x]_\alpha$ in der Gleichung (δ); so fällt diese Gleichung mit dem allgemeinen Integral (11. des §.) genau zusammen, und die Gleichung (δ) ist dann (unter dieser Voraussetzung) ebenfalls das gesuchte allgemeine Integral. Alles analog den (§§. 266. 272. 277. und Anmerkung zu §. 283.)

§. 291. Zusatz.

Es ist klar, daß man dasselbe allgemeine Integral auch in Form einer, nach Potenzen von $y-\beta$ fortlaufenden Reihe finden kann, wo dann die Koeffizienten eine willkührliche Funktion von y und z nebst deren Ableitungen nach y und z enthalten werden. Desgleichen kann man dasselbe allgemeine Integral auch nach Potenzen von $z-\gamma$ entwickelt finden, wo dann die Koeffizienten eine willkührliche Funktion von x und y nebst deren Ableitungen nach x und nach y enthalten.

§. 292. Zusatz.

I. In endlicher Form ausgedrückt, wenn solches möglich ist, wird also das allgemeine Integral

$$W_{x,y,z,u,\downarrow} = 0$$

eine willkührliche Funktion ψ der drei Veränderlichen x, y, z in sich aufnehmen, welche jedoch nicht ganz willkührlich seyn wird, da $W = 0$ der Gleichung $F = 0$ zu genügen hat. Daß ψ auch noch u in sich aufnehmen d. h. x, y, z auch noch implizit (in u) enthalten könne, fällt dabei von selbst in die Augen.

II. Es muß daher ψ so beschaffen seyn, daß, wenn man aus

$$(\odot)\cdots \quad W=0, \quad \partial W_{(x)}=0, \quad \partial W_{(y)}=0, \quad \partial W_{(z)}=0$$

sowohl dieses dem F fremde ψ, als auch dessen mit ihm zugleich unbestimmte Ableitungen $\partial\psi_{(x)}$, $\partial\psi_{(y)}$, $\partial\psi_{(z)}$ eliminirt, dann $F=0$ sich ergiebt. Dies ist aber nur dann möglich, wenn ψ eine ganz willkührliche Funktion von nur zwei Veränderlichen ω und ω' ist, während ω und ω' wiederum bestimmte Funktionen von x, y, z und u sind. Denn nur dann reduziren sich die drei unbestimmten $\partial\psi_{(x)}$, $\partial\psi_{(y)}$, $\partial\psi_{(z)}$, weil dann

$$\partial\psi_x = \partial\psi_\omega\cdot\partial\omega_{(x)}+\partial\psi_{\omega'}\cdot\partial\omega'_{(x)},$$

$$\partial\psi_y = \partial\psi_\omega\cdot\partial\omega_{(y)}+\partial\psi_{\omega'}\cdot\partial\omega'_{(y)},$$

$$\partial\psi_z = \partial\psi_\omega\cdot\partial\omega_{(z)}+\partial\psi_{\omega'}\cdot\partial\omega'_{(z)}$$

ist, auf nur zwei unbestimmte $\partial\psi_\omega$, $\partial\psi_{\omega'}$, welche mit ψ zugleich

aus den 4 Gleichungen (⊙) allemal wirklich weggebracht werden können.

So ist z. B. das allgemeine Integral von

1) $(y-z)(x\cdot\partial u_x-u)+yz(\partial u_y-\partial u_z)+x\cdot(z\cdot\partial u_z-y\cdot\partial u_y)=0$

in endlicher Form

2) $u=x\cdot\psi_{\omega,\omega'}$, wo $\omega=x\cdot y\cdot z$, $\omega'=x+y+z$ ist.

III. Aus diesem allgemeinen Integral

$$W_{x,y,z,u,\psi}=0,$$

wo ψ eine willkührliche Funktion zweier bestimmten Funktionen ω und ω' von x,y,z und u ist, gehen aber wieder alle besonderen Integrale hervor, wenn man sich unter ψ nach und nach alle bestimmten Funktionen von ω und ω' vorgestellt, oder solche statt ψ wirklich gesetzt denkt. Daher kann auch $\psi=0$, auch $\psi=\omega'$ gesetzt werden, und man wird ebenfalls besondere Integrale haben.

So sind

$$u=z\cdot(axyz+b(x+y+z)),$$

$$u=\frac{x}{x+y+z}+x^2yz,$$

$$u=\frac{ax^2yz}{x+y+z},$$

$$u=ax\cdot(x+y+z)^{xyz},$$

$$u=ax\cdot(xyz)^{x+y+z},$$

$$u=x^2yz, \quad u=x(x+y+z),$$

$$u=\frac{a(x+y+z)}{yz},$$

$$u=x\cdot(a+b(x+y+z)+cxyz),$$

ꝛc. ꝛc. besondere Integrale der Parzialgleichung (1.) im Beispiel zu (Nr. II.).

IV. Dieses allgemeine Integral

$$W_{x,y,z,u,\psi}=0$$

bleibt eben so allgemein

1) wenn man statt ω und ω' irgend bestimmte Funktionen von den zuerst gefundenen ω und ω' denkt;

2) wenn man sich statt ψ irgend eine bestimmte Zusammensetzung aus ω, ω' und ψ gesetzt denkt, so lange nur das letztere ψ als eine willkührliche Funktion von ω und ω' gedacht wird.

(Vgl. §. 286. V.).

So ist z. B. das vorliegende Integral

$$u = x \cdot \psi_{\omega,\omega'}$$

noch eben so allgemein, man mag

$$\omega = xyz, \qquad \omega' = x+y+z$$

oder $$\omega = \frac{xyz}{x+y+z}, \qquad \omega' = xyz \cdot (x+y+z)$$

oder $$\omega = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2, \qquad \omega' = \frac{x+y+z}{xyz}$$

oder $$\omega = (x+y+z)^2, \qquad \omega' = x^2 y^2 z^2,$$

2c. 2c. nehmen.

Aber auch

$$u = \frac{1}{yz} \cdot \psi_{\omega,\omega'}, \qquad u = \frac{x}{x+y+z} \cdot \psi_{\omega,\omega'},$$

$$u = \frac{x^2 yz}{x+y+z} \cdot \psi_{\omega,\omega'}, \text{ 2c. 2c.}$$

sind noch eben so allgemeine Integrale der oben gegebenen Parzialgleichung.

§. 293. Zusatz.

I. Hat man die Form des allgemeinen Integrals

$$W_{x,y,z,u,\psi} = 0$$

bereits aufgefunden; so lassen sich die beiden Funktionen ω und ω', von welchen ψ eine willkührliche Funktion vorstellen muß, wenn $W = 0$ das allgemeine Integral wirklich seyn soll, dadurch finden, daß man aus

$$W = 0, \quad \partial W_{(x)} = 0, \quad \partial W_{(y)} = 0, \quad \partial W_{(z)} = 0$$

sowohl ψ, als auch ∂u_x, ∂u_y, ∂u_z findet (in x, y, z, u, $\partial \psi_x$, $\partial \psi_y$ und $\partial \psi_z$ ausgedrückt), und diese Werthe in $F = 0$ substi-

tuirt, wodurch diese Gleichung $F = 0$, wie nach (§. 286.) näher nachgewiesen werden kann, weil $\psi_{\omega,\omega'}$ auch bloß ψ_ω, also auch bloß ω, ferner auch bloß $\psi_{\omega'}$, demnach auch bloß ω' vorstellt, auf die Gleichung

2) $M_{x,y,z,u} \cdot \partial\psi_x + N_{x,y,z,u} \cdot \partial\psi_y + P_{x,y,z,u} \cdot \partial\psi_z + R_{x,y,z,u} \cdot \partial\psi_u = 0$

gebracht werden kann. Es giebt dann allemal 2 Funktionen von x, y, z und u, die nicht Funktionen von einander sind, welche aber, statt ψ gesetzt, dieser Gleichung (2.) genügen. Sind solche (durch Versuche) gefunden, so setzt man die eine statt ω, die andere statt ω'.

Jede andere Funktion von x, y, z, u, welche der Gleichung (2.) noch genügt, ist dann nothwendig eine Funktion der beiden so eben für ω und ω' erhaltenen Funktionen, kann daher ebenfalls statt ω oder ω' gesetzt werden.

Hat man z. B. die Form

2) $$u = x \cdot \psi_{\omega,\omega'}$$

des allgemeinen Integrals der gegebenen Parzialgleichung

1) $(x.\partial u_x - u)\cdot(y-z) + yz\cdot(\partial u_y - \partial u_z) + x(z\cdot\partial u_z - y\cdot\partial u_y) = 0$

bereits aufgefunden, und sucht man bloß noch die Werthe von ω und ω'; so erhält man auf dem so eben bezeichneten Wege die Gleichung

3) $x(y-z)\cdot\partial\psi_x + y(z-x)\cdot\partial\psi_y + z(x-y)\cdot\partial\psi_z = 0$,

welcher Gleichung einmal durch $\psi = xyz$ und dann noch durch $\psi = x+y+z$ genügt wird, so daß man deshalb

$$\omega = xyz \quad \text{und} \quad \omega' = x+y+z$$

nehmen kann. (Vgl. §. 287. I.).

II. Vermuthet man im Voraus schon, daß ω und ω' bloß x, y, z aber nicht mehr u enthalten; so wird die Gleichung zur Bestimmung von ω und ω' noch einfacher und reduzirt sich auf die Form

$$M\cdot\partial\psi_x + N\cdot\partial\psi_y + P\cdot\partial\psi_z = 0,$$

wo M, N, P bloß x, y und z enthalten, und wo dann wiederum zwei Werthe von ψ statt ω und ω' genommen werden können. (Vgl. §. 287. II., auch das Beispiel zur vorhergehenden I.).

III. Hat man von der Parzialgleichung $F = 0$ ein besonderes Integral

$$W_{x,y,z,u,a} = 0$$

mit wenigstens einer willkührlichen Konstante a gefunden; so erhält man aus selbigem sogleich das allgemeine Integral, wenn man überall, wo a steht, $\psi_{\omega,\omega'}$ dafür setzt (in $W_{x,y,z,u,a} = 0$), und dann nach (I. oder II.) die noch unbekannten ω und ω' dazu sucht. Darum nennen wir ein solches besonderes Integral ein ausreichendes. (Vgl. §. 287. III. IV.).

Aus dem besondern Integral

$$u = a \cdot \sqrt{\frac{x}{yz}}$$

der oben gegebenen Parzialgleichung erhält man daher das allgemeine Integral

$$u = \psi_{\omega,\omega'} \cdot \sqrt{\frac{x}{yz}},$$

wo man denn nach (I. oder II.) noch $\omega = xyz$, $\omega' = x+y+z$ dazu findet.

IV. Ein besonderes Integral heißt aber wiederum vollständig, wenn es wenigstens 3 willkührliche Konstanten enthält, also z. B. wenn es die Form

$$V_{x,y,z,u,a,b,c} = 0$$

hat, weil, wenn man aus dieser Gleichung und den 3 Ableitungsgleichungen

$$\partial V_{(x)} = 0, \quad \partial V_{(y)} = 0, \quad \partial V_{(z)} = 0$$

die 3 Konstanten a, b, c eliminirt, nothwendig die übrigen, etwa in V noch vorkommenden willkührlichen (d. h. der $F = 0$ fremden) Konstanten von selbst wegfallen müssen, und die gegebene Parzialgleichung $F = 0$ hervorgehen wird. (Vgl. §. 287. V.).

§. 294. Zusatz.

I. Hat man zwei besondere Integrale der gegebenen Parzialgleichung

$$F_{x,y,z,u,u_1,{}_1u,u'} = 0$$

nämlich

1) $V_{x,y,z,u,a} = 0$ und 2) $f_{x,y,z,u} = 0$,

von denen das eine $V = 0$ nur eine einzige willkührliche Konstante a, das andere $f = 0$ dagegen gar keine willkührliche Konstante zu enthalten braucht; so erhält man aus $V = 0$ nach (§. 293. III.) zunächst das allgemeine Integral

3) $V_{x,y,z,u,\psi} = 0$

der Form nach, wo ψ statt a gesetzt worden ist, und eine willkührliche Funktion von ω und ω' vorstellt, während, wenn man aus (1. und. 2.) u eliminirt, und die entstehende Gleichung nach a auflöst, die für a sich ergebende Funktion von x,y und z statt ω oder statt ω' genommen werden kann, wenn man nur weiß, daß ω oder ω' in diesem Falle kein u in sich aufnehmen.

Und ist noch ein drittes besonderes Integral

4) $f_{x,y,z,u} = 0$

bekannt, mit oder ohne eine willkührliche Konstante; so darf man nur aus (1. und 4.) ebenfalls noch u eliminiren, und man wird nachmals a in x,y und z erhalten, und diese Funktion wird man statt ω' nehmen können, wenn man die vorige statt ω genommen hat. (Vgl. §. 288. I.).

II. Und so läßt sich also durch 3 besondere Integrale, von denen nur ein einziges eine willkührliche Konstante in sich aufgenommen zu haben braucht, das allgemeine Integral, ohne alle Integration und ohne weiteres finden, wenn man nur voraussetzen darf, was freilich nur in Einzelfällen statt finden wird, daß ω und ω' kein u in sich aufnehmen.

Daher liefert in denselben Einzelfällen das vollständige Integral

$$V_{x,y,z,u,a,b,c} = 0$$

sogleich das allgemeine Integral, weil, wenn man abwechselnd $b = c = 0$, oder $a = c = 0$, oder $a = b = 0$ setzt, 3 verschiedene besondere Integrale hervorgehen, also das Verfahren (I.) statt finden kann. (Vgl. §. 288. II.).

Ist dagegen ein einziges Integral mit nur zwei willkührlichen Konstanten gegeben, so kann man solches nur als zwei verschiedene besondere Integrale ansehen; daher wird sich, auch wenn man die Voraussetzung machen darf, daß ω und ω' kein u enthalten, nun zunächst zwar wiederum die Form des allgemeinen Integrals, aber nur ω (oder ω') allein auf dem Wege der (I.) bestimmen lassen, und man müßte daher dann noch zu dem Verfahren des (§. 287. II.) zurückkehren, um ω' (oder ω) dazu noch zu finden.

III. Um aber aus einem vollständigen Integral das allgemeine zu finden, ohne zur Integration seine Zuflucht nehmen zu müssen, nicht bloß wenn, wie in (I. und II.), der besondere Fall eintritt, daß ω und ω' kein u enthalten, sondern auch wenn ω und ω' auch noch x, y, z implizit in u in sich aufnehmen, stelle man wieder dem (§. 288. III.) analoge Betrachtungen an, nämlich:

A) Aus einem besonderen Integral mit mehr willkührlichen Konstanten

$$V_{x,y,z,u,a,b,c,\ldots} = 0$$

erhält man die Form des allgemeinen Integrals nicht bloß, wenn man statt einer einzigen Konstante, sondern auch, wenn man statt jeder der willkührlichen Konstanten willkührliche Funktionen von ω und ω' setzt. Zuletzt müssen dann noch ω und ω' dazu gesucht werden, um das allgemeine Integral selbst zu haben.

B) Auch wird man das allgemeine Integral erhalten, wenn man zuerst statt b, c ... willkührliche Funktionen von a, oder statt c, &c. willkührliche Funktionen von a und b, u. s. w. f., nachher aber statt a, oder statt a und b, &c. willkührliche oder bestimmte Funktionen von ω und ω' setzt, und zuletzt noch ω und ω' dazu sucht.

C) Allemal werden aber die in B erhaltenen Endresultate sich in eine solche Form bringen lassen, daß die mehreren willkührlichen Funktionen von ω und ω', welche auf diesen Wegen eingegangen seyn dürften, in eine einzige willkührliche Funktion von ω und ω' sich zusammenfassen lassen. — Deshalb kann man

auch die einzelnen willkührlichen Funktionen, welche statt a, b, c, ꝛc. gesetzt werden, noch gegebenen Bedingungen unterwerfen, wenn nur zuletzt eine einzige völlig willkührliche Funktion von ω und ω' übrig bleibt, damit der Bedingung des allgemeinen Integrals genügt werde. (Vgl. §. 288. III.).

IV. Hat man ein besonderes aber vollständiges Integral (d. h. mit wenigstens 3 willkührlichen Konstanten a,b,c), nämlich

1) $$V_{x,y,z,u,a,b,c} = 0,$$

so erhält man die gegebene Parzialgleichung

2) $$F_{x,y,z,u,u_1,_1u,u'} = 0,$$

wenn man aus

3) $$V = 0, \quad \partial V_{(x)} = 0, \quad \partial V_{(y)} = 0, \quad \partial V_{(z)} = 0$$

sowohl a als auch b und c eliminirt.

Auf diese Betrachtung in Verbindung mit den vorhergehenden kann man aber das zu Anfang der (III.) noch gewünschte Verfahren gründen.

Es genügt nämlich offenbar dieselbe Form (1.) auch dann noch der gegebenen Parzialgleichung (2.), wenn man a, b, c als solche Funktionen von x, y, z, u sich denkt, für welche die Ableitungen in (3.) der Form nach unverändert dieselben bleiben, also wenn

4) $$\partial V_a \cdot \partial a_{(x)} + \partial V_b \cdot \partial b_{(x)} + \partial V_c \cdot \partial c_{(x)} = 0,$$

5) $$\partial V_a \cdot \partial a_{(y)} + \partial V_b \cdot \partial b_{(y)} + \partial V_c \cdot \partial c_{(y)} = 0,$$

6) $$\partial V_a \cdot \partial a_{(z)} + \partial V_b \cdot \partial b_{(z)} + \partial V_c \cdot \partial c_{(z)} = 0;$$

also auch wenn a, b, c Funktionen von ω und ω', aber ω und ω' solche Funktionen von x, y, z, u sind, daß

7) $$\partial V_a \cdot \partial a_\omega + \partial V_b \cdot \partial b_\omega + \partial V_c \cdot \partial c_\omega = 0$$

und 8) $$\partial V_a \cdot \partial a_{\omega'} + \partial V_b \cdot \partial b_{\omega'} + \partial V_c \cdot \partial c_{\omega'} = 0$$

ist.

Nun kann man aber jedem besonderen Integral $V = 0$ allemal die Form geben, daß es schon durch das allgemeine Integral

9) $$W_{x,y,z,u,\psi} = 0$$

vorgestellt ist, wenn man nur unter ψ die bestimmte Funktion von ω, ω' und a, b, c sich denkt, welche das besondere Integral (1.) d. h. $V = 0$ giebt; dann aber ist offenbar

10) $\partial V_a = \partial W_\psi \cdot \partial \psi_{a'}$, $\partial V_b = \partial W_\psi \cdot \partial \psi_{b'}$, $\partial V_c = \partial W_\psi \cdot \psi_{c'}$

also

11) $\partial V_a \cdot \partial a_\omega + \partial V_b \cdot \partial b_\omega + \partial V_c \cdot \partial c_\omega$
$= \partial W_\psi \cdot (\partial \psi_a \cdot \partial a_\omega + \partial \psi_b \cdot \partial b_\omega + \partial \psi_c \cdot \partial c_\omega)$,

12) $\partial V_a \cdot \partial a_{\omega'} + \partial V_b \cdot \partial b_{\omega'} + \partial V_c \cdot \partial c_{\omega'}$
$= \partial W_\psi \cdot (\partial \psi_a \cdot \partial a_{\omega'} + \partial \psi_b \cdot \partial b_{\omega'} + \partial \psi_c \cdot \partial c_{\omega'})$,

und es reduziren sich die Gleichungen (7. und 8.), welche zur Bestimmung von ω und ω' dienen, nachdem man durch ihren gemeinschaftlichen Faktor ∂W_ψ dividirt hat, bloß auf

13) $\partial \psi_a \cdot \partial a_\omega + \partial \psi_b \cdot \partial b_\omega + \partial \psi_c \cdot \partial c_\omega = 0$,

14) $\partial \psi_a \cdot \partial a_{\omega'} + \partial \psi_b \cdot \partial b_{\omega'} + \partial \psi_c \cdot \partial c_{\omega'} = 0$,

d. h. auf Gleichungen, welche außerhalb ω und ω' kein x, y, z weiter enthalten.

Man wird daher, sobald aus einem besonderen Integral mit wenigstens einer willkührlichen Konstante, also z. B. aus $V = 0$ in (1.), die Form des allgemeinen Integrals gefunden ist, ω und ω' nach folgender Regel dazu finden: Man denke sich in dem vollständigen Integral

$$V_{x,y,z,u,a,b,c} = 0$$

a,b,c als Funktionen von ω und ω', differenziire dann $V = 0$ nach dem ω was in a, b, c steckt, so wie auch nach dem ω', welches in a,b,c vorausgesetzt wird, um die Gleichungen (7. und 8.) zu erhalten; dividire beide durch ihren größten, dem ∂V_a, ∂V_b, ∂V_c gemeinschaftlichen Theiler, setze dann statt a, b, c irgend bestimmte Funktionen von ω, ω', also statt ∂a_ω, $\partial a_{\omega'}$, ∂b_ω, ꝛc., was für sie sich ergiebt: so hat man zwei Gleichungen bloß zwischen ω und ω' und x, y, z, u, woraus sich dann ω und ω' ohne weiteres auf algebraischem Wege und ohne Integration finden läßt. (Vgl. §. 288. IV. und V.).

Anmerkung. Setzt man in dem vollständigen Integral

$$V_{x,y,z,u,a,b,c} = 0$$

ω statt a, ω' statt b und $\psi_{\omega,\omega'}$ statt c, und bestimmt man dann ω und ω' aus den vorstehenden Gleichungen (7. und 8.), welche jetzt, weil $\partial a_\omega = 1$, $\partial a_{\omega'} = 0$, $\partial b_\omega = 0$, $\partial b_{\omega'} = 1$ ist, in folgende übergehen

$$[\partial V_a]_\omega + [\partial V_c]_\psi \cdot \partial\psi_\omega = 0,$$

$$[\partial V_b]_{\omega'} + [\partial V_c]_\psi \cdot \partial\psi_{\omega'} = 0,$$

indem man ψ ganz unbestimmt läßt; denkt man sich also aus

$$V_{x,y,z,u,\omega,\omega',\psi} = 0$$

und den beiden vorstehenden Gleichungen ω und ω' eliminirt: so erhält man das bisher allein bekannte Verfahren des Lagrange, wie solches bereits in der (Anmerkung 1. zu §. 288.) für den dortigen Fall beschrieben und näher besprochen ist. Auch bemerkt man, daß die Unbequemlichkeit, ja die Schwierigkeit der Ausführung dieses Verfahrens hier noch größer ist, als in dem dort betrachteten einfachern Falle; daß daher unsere Methoden hier verhältnißmäßig noch mehr vorzuziehen seyn dürften.

§. 295. Zusatz.

B β) Von den singulären Werthen der Parzialgleichungen der ersten Ordnung mit 4 Veränderlichen, worunter 3 von einander unabhängig sind.

Betrachten wir zuletzt noch die singulären Werthe, so steht für sie fest:

I. Sie werden direkt aus der Parzialdifferenzialgleichung $F = 0$ gefunden, wenn man die in (Anmerkung zu §. 290.) für ∂u_x, $\partial^2 u_x$, $\partial^3 u_x$, ꝛc. gefundenen Ausdrücke $= \frac{0}{0}$ setzt. Die Werthe $u_{x,y,z}$, welche Zähler und Nenner eines solchen Ausdrucks $= 0$ machen, werden geprüft 1) ob sie der Gleichung $F = 0$ genügen, aber auch 2) ob sie nicht in dem allgemeinen Integral

$$W_{x,y,z,u,\psi} = 0$$

enthalten sind. Nur wenn beides bejaht werden kann, ist $u = u_{x,y,z}$ ein singulärer Werth.

II. Dieselben singulären Werthe werden auch gefunden, wenn man aus dem allgemeinen Integral

1) $$W_{x,y,z,u,\psi} = 0$$

und aus dessen Ableitung nach ψ, nämlich

2) $$\partial W_{\psi} = 0,$$

den Buchstaben ψ eliminirt; wenn man nur der Gleichung $W = 0$ eine dazu schickliche Form gegeben hat, eine solche nämlich, daß die indirekten Operationszeichen möglichst weggeschafft sind, und namentlich ψ nicht isolirt steht.

III. Dieselben singulären Werthe werden auch aus einem besonderen ausreichenden Integral (mit nur einer einzigen willkührlichen Konstante)

$$V_{x,y,z,u,a} = 0$$

gefunden, wenn man aus $V = 0$ und $\partial V_a = 0$ die Konstante a eliminirt.

IV. Dieselben singulären Werthe erhält man noch aus dem besonderen Integral

$$V_{x,y,z,u,a,b} = 0$$

mit zwei willkührlichen Konstanten, wenn man aus

$$\partial V_a = 0 \quad \text{und} \quad \partial V_b = 0$$

den gemeinschaftlichen Faktor $L_{x,y,z,u,a,b} = 0$, und aus

$$V = 0 \quad \text{und} \quad L = 0$$

eine der Konstanten eliminirt, wo dann die andere von selbst wegfällt.*)

---

*) Nimmt man nicht den gemeinschaftlichen Faktor $L = 0$, sondern die beiden Gleichungen $\partial V_a = 0$ und $\partial V_b = 0$, nachdem man sie durch diesen Faktor L dividirt hat, und eliminirt man dann a und b aus diesen Gleichungen und $V = 0$; so erhält man nicht den singulären Werth, sondern entweder gar nichts oder ein besonderes Integral.

Denkt man sich $V = 0$ im allgemeinen Integral

$$W_{x,y,z,u,\psi} = 0$$

vorgestellt, so ist L nichts anders als ∂W_{ψ} (dem Wesen nach).

V. Dieselben singulären Werthe erhält man noch aus dem besonderen aber vollständigen Integral (mit wenigstens 3 willkührlichen Konstanten)

$$V_{x,y,z,u,a,b,c} = 0,$$

wenn man den gemeinschaftlichen Faktor

$$L = 0$$

von

$$\partial V_a = 0, \quad \partial V_b = 0, \quad \partial V_c = 0,$$

nimmt, und aus $V = 0$ und $L = 0$ eine der 3 Konstanten eliminirt, wo dann die beiden andern Konstanten von selbst mit fortgehen.

Eliminirt man aber aus

$$V = 0 \quad \text{und} \quad \partial V_a = 0, \quad \partial V_b = 0, \quad \partial V_c = 0,$$

nachdem letztere 3 Gleichungen durch L wegdividirt worden sind, die 3 Konstanten a, b, c; so erhält man den singulären Werth nicht, sondern entweder gar nichts oder ein besonderes Integral.*)

VI. Hat aber ein besonderes Integral beliebig viel willkührliche Konstanten; so kann man doch immer jedes der in (III. IV. u. V.) beschriebenen Verfahren anwenden, um den singulären Werth zu erhalten. Nur muß man dem besonderen Integrale allemal die schickliche Form geben, welche im Allgemeinen darin besteht, daß man die indirekten Operationen wegbringt, namentlich aber keine der Konstanten isolirt hinstellt.

Anmerkung. Das in dieser Abtheilung Vorgetragene reicht aber aus, um den Anfänger in den Stand zu setzen, das Verfahren auffinden zu können, dessen man sich bedienen muß, wenn eine Parzialgleichung der ersten Ordnung zwischen m+1

---

*) Nach Lagrange würde man gerade dadurch, daß man aus

$$V = 0, \quad \partial V_a = 0, \quad \partial V_b = 0, \quad \partial V_c = 0,$$

a, b, c eliminirt, den singulären Werth erhalten. Diese Behauptung des Lagrange ist also hiernach zu berichtigen.

Veränderlichen gegeben ist, von denen m als von einander unabhängig angesehen werden, um dann

1) ihr allgemeines Integral zu finden;
2) den Zusammenhang zwischen diesem allgemeinen und den besondern Integralen, so wie den Uebergang von letzteren zu ersterem zu übersehen; endlich
3) die singulären Werthe finden zu können, und zwar
   α) aus der gegebenen Parzialgleichung unmittelbar,
   β) aus dem allgemeinen Integral derselben,
   γ) aus jedem der besondern Integrale, wenn solches wenigstens eine willkührliche Konstante enthält.

Daher wollen wir nun ohne weiteren Aufenthalt zur zweiten Abtheilung dieses Kapitels übergehen.

Zweite Abtheilung.

Integration zweier oder mehrerer Parzialgleichungen der ersten Ordnung.

A. Wenn in den gegebenen Parzialgleichungen bloß die Ableitungen eines einzigen Veränderlichen (nach zwei oder mehr Veränderlichen genommen) vorkommen sollten.

§. 296. Erste Aufgabe.

Es sind zwei solche Parzialgleichungen gegeben

1) $F_{x,y,z,{}_1z,z_1} = 0$ und 2) $F'_{x,y,z,{}_1z,z_1} = 0$,

wie im (§. 283.) eine einzige: man soll alle Funktionen $z_{x,y}$ finden, welche statt z gesetzt, diese beiden Gleichungen zugleich identisch machen.

Auflösung. Man eliminire auf algebraischem Wege zuerst ${}_1z$ oder ∂z_y, dann z_1 oder ∂z_x aus beiden gegebenen Gleichungen; so erhält man zwei neue Gleichungen

3) $f_{x,y,z,z_1} = 0$ und 4) $f_{x,y,z,{}_1z} = 0$,

welche, da die erste bloß ∂z_x, die andere bloß ∂z_y enthält, als Differenzialgleichungen mit einem einzigen unabhängigen Veränderlichen, wie solche im vorhergehenden Kapitel (XII.) behandelt worden sind, angesehen werden müssen. Man wird daher von der ersten (zwischen x, z und ∂z_x, wo y als konstant angesehen ist) das Integral finden, mit einer willkührlichen Konstante Y, nämlich

5) $L_{x,z,y,Y} = 0$,

wo im Allgemeinen Y als Funktion von y angesehen werden muß, aber kein x enthalten darf. Die hieraus (d. h. aus 5.) für z gezogenen Funktionen machen dann die Gleichung (3.) identisch. Damit sie aber auch die Gleichung (4.) identisch machen, muß die Konstante Y dem gemäß bestimmt werden. Nimmt man daher von der (5.) die Ableitung nach y, nämlich

6) $\partial L_y + \partial L_z \cdot \partial z_y + \partial L_Y \cdot \partial Y_y = 0$;

findet man dann aus (5. u. 6.) sowohl z als auch ∂z_y oder ${}_1z$, und subſtituirt man diese Werthe in (4.) statt z und ${}_1z$: so erhält man eine Gleichung

7) $K_{y,Y,\partial Y} = 0$

zwischen y, Y und ∂Y_y, welche im Allgemeinen auch noch x enthalten wird.

Enthält nun die Gleichung (7.) wirklich noch x; so ist kein Y ohne x zu finden, welches diese, also die (4.), identisch machen könnte, und es giebt dann keine Funktion $z_{x,y}$, welche beide Gleichungen (3. u. 4.) zugleich, also keine, welche (1. u. 2.) zugleich identisch machen könnte.

Fällt aber aus der Gleichung (7.) x wirklich ganz fort; so darf man nur die Gleichung (7.) noch nach (§. 265. oder §. 266.) integriren, um Y_y so zu haben, daß die Gleichung (5.) beide Gleichungen (3. u. 4.), also auch (1. u. 2.), zugleich identisch machen.

Die Bedingung, daß die Gleichung (7.) kein x enthält, läßt sich schreiben

8) $$\partial K_{(x)} = 0$$

und kann die Bedingung der Integrabilität genannt werden.

§. 297. Zusatz.

Der einfachste Fall dieser allgemeinen Aufgabe ist der, wo die beiden gegebenen Parzialgleichungen bloß die Form

3) $\partial z_x = M_{x,y}$ und 4) $\partial z_y = N_{x,y}$

haben. Die obige Gleichung (5. des §. 296.) wird nun

5) $$z = \int_{x \div \alpha} M \cdot dx + Y,$$

wo $\int_{x \div \alpha} M \cdot dx$ das mit $x = \alpha$ anfangende Integral von M nach x vorstellt, während α ganz beliebig, also auch $= 0$ genommen werden kann; wo Y aber eine willkührliche Konstante ist, welche hier im Allgemeinen als eine Funktion von y angesehen werden muß. Die Gleichung (6. des §. 296.) wird nun, wenn α von y unabhängig genommen wird, weil dann nach (§§. 219.—224.) $\partial(\int M \cdot dx)_y = \int \partial M_y \cdot dx$ ist,

6) $$\partial z_y = \int_{x \div \alpha} \partial M_y \cdot dx + \partial Y_y,$$

und wenn man diesen Werth in (4.) substituirt, so erhält man

7) $$\int_{x \div \alpha} \partial M_y \cdot dx + \partial Y_y = N_{x,y}.$$

So sieht jetzt die Gleichung (7. des §. 296.) aus. Enthält sie nun kein x mehr, d. h. fällt x aus ihr von selbst weg, so giebt sie sogleich

I. $$Y = \int (N - \int_{x \div \alpha} \partial M_y \cdot dx) \cdot dy;$$

folglich aus (5.)

II. $$z = \int_{x \div \alpha} M \cdot dx + \int (N - \int_{x \div \alpha} \partial M_y \cdot dx) \cdot dy,$$

wo das letztere Integral nach y eine willkührliche Konstante in sich aufnimmt, während α von y unabhängig gewählt werden muß. Die Bedingung der Integrabilität, welche (B. 8. des §. 296.) durch $\partial K_{(x)} = 0$ ausgedrückt ist, wird aber jetzt

8) $$\partial M_y = \partial N_x$$ *).

Beispiel. Wären gegeben die Gleichungen

1) $\partial z_x = \frac{-x+a\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und 2) $\partial z_y = \frac{-y+2by\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

so hätte man

3) $M = \frac{-x+a\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und $\partial M_y = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

4) $N = \frac{-y+2by\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und $\partial N_x = \frac{yx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Also ist diesmal wirklich die Bedingung $\partial M_y = \partial N_x$ der Integrabilität erfüllt, man weiß daher nun gewiß, daß es eine Funktion $z_{x,y}$ giebt, welche die Gleichungen (1. u. 2.) zugleich identisch macht. Um sie zu finden hat man aber

5) $\int_{x\div 0} M \cdot dx = \int \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+a\right)\cdot dx = ax-\sqrt{x^2+y^2}+y$,

welches Integral mit $x = 0$ anfängt.

Ferner hat man

6) $\int_{x\div 0} \partial M_y \cdot dx = \int \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot dx = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+1$,

wo das Integral ebenfalls so genommen worden, daß es mit $x = 0$ anfängt.

Dann hat man

7) $$N-\int_{x\div 0} \partial M_y \cdot dx = 2by-1,$$

also

8) $$\int (N-\int_{x\div 0} \partial M_y \cdot dx)\cdot dy = by^2-y+C;$$

demnach aus (II.), wenn (5. u. 8.) subſtituirt werden,

---

*) Daß diese Bedingung statt finden muß, ließ sich leicht voraussehen, weil $\partial(\partial z_x)_y = \partial(\partial z_y)_x = \partial^{1,1} z_{x,y}$ ist. Dagegen konnte man nicht vorher wissen, daß diese Aufgabe bereits dann schon eine Auflösung hat, wenn diese Bedingung allein erfüllt ist, da leicht noch neue Bedingungen hätten hinzutreten können, außer dieser, welche man bei dem ersten Anblick der Gleichungen (3. u. 4.) als nothwendig erkennen konnte.

9) $$z = ax - \sqrt{x^2+y^2} + by^2 + C$$

die gesuchte Funktion z von x und y, wo C einen beliebigen von x und y unabhängigen Ausdruck vorstellt, also eine willkührliche Konstante ist.

Anmerkung 1. Ist der Anfangswerth α der Integrale noch eine Funktion von y, so hat man nicht

$$\partial(\int_{x\div\alpha} M \cdot dx)_y = \int_{x\div\alpha} \partial M_y \cdot dx;$$

sondern es ist dann nach (§. 220.)

$$\partial(\int_{x\div\alpha} M \cdot dx) = \int_{x\div\alpha} \partial M_y \cdot dx - [M_x]_\alpha \cdot \partial\alpha_y,$$

und die Formel (II. des §.) geht dann über in

III. $$z = \int_{x\div\alpha} M \cdot dx + \int (N - \int_{x\div\alpha} \cdot \partial M_y \cdot dx + [M]_\alpha \cdot \partial\alpha_y) \cdot dy.$$

Im vorigen Beispiel hatte man, wenn $\alpha = \frac{y}{\sqrt{a^2-1}}$ genommen wird,

$$\int_{x\div\alpha} M \cdot dx = ax - \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\int_{x\div\alpha} \partial M_y \cdot dx = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{a^2-1}}{a},$$

$$[M_x]_\alpha = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2-1}{a} \quad \text{und} \quad \partial\alpha_y = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}},$$

also

$$N - \int_{x\div\alpha} \partial M_y \cdot dx + [M_x]_\alpha \cdot \partial\alpha_y = 2by,$$

und man erhält nun dasselbe Resultat für z, wie vorher.

§. 298. Zweite Aufgabe.

Es sind zwei solche Parzialgleichungen

1) $F_{x,y,z,u,u_1,{}_1u,u'} = 0$ und 2) $F'_{x,y,z,u,u_1,{}_1u,u'} = 0$

gegeben, wie im (§. 290.) eine einzige gegeben war: man soll alle Funktionen u von x, y und z finden, welche diesen beiden Gleichungen zu gleicher Zeit genügen.

Auflösung. Man kann zuerst u' dann ${}_1u$ eliminiren, und man erhält zwei neue Gleichungen

3) $f_{x,y,u,u_1,{}_1u} = 0$ und 4) $f_{x,z,u,u_1,u'} = 0,$

wo in (3.) z als konstant, in (4.) dagegen y als konstant angesehen werden muß. Nun kann die Gleichung (3.) nach den von (§. 283.) an beschriebenen Methoden integrirt werden, und man wird eine Gleichung zwischen u und x und y (und dem konstanten z) und noch einer willkührlichen Funktion ψ_ω haben, wo ω in x, y und u (und dem konstanten z) ausgedrückt, bestimmt und bekannt ist.

Differenziirt man nun diese Gleichung nach allem x und auch nach allem z, um nicht bloß u sondern auch u_1 und u′ zu erhalten, und substituirt man diese Werthe statt u, u_1, u′, in die Gleichung (4.), welche auch noch identisch werden muß, wenn die (1. u. 2.) zu gleicher Zeit identisch werden sollen; so erhält man eine Gleichung, aus welcher im Allgemeinen ψ_ω eine nähere Bestimmung erhalten wird.

Der Ausführung dieses Verfahrens treten aber so viele Hindernisse des Kalkuls entgegen, daß wir uns hier mit dieser kurzen Andeutung begnügen müssen.

§. 299. Dritte Aufgabe.

Sind aber drei solche Gleichungen gegeben, wie im vorigen (§. 298.) deren nur zwei gegeben waren, nämlich

$$1) \quad F = 0, \quad 2) \quad F' = 0, \quad F'' = 0;$$

so kann man aus ihnen abwechselnd $_1u$ und u′, dann u_1 und u′, zuletzt u_1 und $_1u$ elimiiren, und man erhält 3 neue Gleichungen

$$4) \quad f_{x,u,u_1} = 0, \quad \text{wo y und z als konstant,}$$

$$5) \quad f_{y,u,{}_1u} = 0, \quad \text{wo x und z als konstant,}$$

$$6) \quad f_{z,u,u'} = 0, \quad \text{wo x und y als konstant}$$

angesehen werden müssen.

Integrirt man nun die (4.) nach (§§. 265. 266.); so erhält man eine Gleichung zwischen x und u und den konstanten y und z, mit einer willkührlichen Konstante X, welche kein x enthält, aber als eine willkührliche Funktion von y und z angesehen wer-

den muß. Setzt man nun diesen Werth für u in die Gleichungen (5. und 6.), so erhält man zwei neue Gleichungen;

7) $G_{y,x,,1x} = 0$ und $G'_{z,x,x'} = 0$

(wo $_1X = \partial X_y$, $X' = \partial X_z$ ist), welche Gleichungen beide kein x enthalten dürfen, wenn allen 3 Gleichungen (1.—3.) durch eine und dieselbe Funktion $u_{x,y,z}$ soll genügt werden können, weshalb man sogleich die beiden Bedingungsgleichungen der Integrabilität

I. $\partial G_{(x)} = 0$ und II. $\partial G'_{(x)} = 0$

erhält. Integrirt man nun, im Falle diese Bedingungsgleichungen (I. u. II.) erfüllt seyn sollten, die Gleichung (7.), wo z als konstant angesehen ist; so erhält man eine Gleichung zwischen y und X und z und einer willkührlichen Konstante Y, welche kein y (und ohnedies kein x) enthält, aber wohl als eine noch zu bestimmende Funktion von z angesehen werden muß. Diesen Werth von X setzt man zuletzt in die Gleichung (8.); so erhält man eine neue Gleichung

9) $H_{z,Y,Y'} = 0$, wo $Y' = \partial Y_z$ ist,

die kein y mehr enthalten darf, wenn die Bestimmung von Y_z möglich seyn soll. Also erhält man die dritte Bedingungsgleichung der Integrabilität, nämlich

III. $\partial H_{(y)} = 0$

welche wir als erfüllt voraussetzen müssen. Integrirt man dann vollends die (9.); so erhält man noch Y in z mit einer willkührlichen Konstante G, welche letztere ohne x, ohne y und ohne z seyn muß. Dann hat man auch X, also auch u völlig und so bestimmt, daß alle 3 Gleichungen (1.—3.) zugleich identisch werden.

§. 300. Zusatz.

Der einfachste Fall dieser Aufgabe ist der, wo die 3 gegebenen Gleichungen die Form

1) $\partial u_x = M_{x,y,z,}$ 2) $\partial u_y = N_{x,y,z}$ und 3) $\partial u_z = P_{x,y,z}$

haben. Die Bedingungsgleichungen der Integrabilität (§. 299. I. II. III.) werden jetzt

4) $\partial M_y = \partial N_x$ (beide $= \partial^{1,1} u_{x,y}$)

5) $\partial M_z = \partial P_x$ (beide $= \partial^{1,1} u_{x,z}$)

und

6) $\partial N_z = \partial P_y$ (beide $= \partial^{1,1} u_{y,z}$).

Und man erhält dabei nach und nach

$$u = \int_{x \div \alpha} M \cdot dx + X_{y,z},$$

$$X_{y,z} = \int_{y \div \beta} (N - \int_{x \div \alpha} \partial M_y \cdot dx) \cdot dy + Y_z$$

und

$$Y_z = \int (P - \int_{x \div \alpha} \partial M_z \cdot dx - \int_{y \div \beta} (\partial N_z - \int_{x \div \alpha} \partial^{1,1} M_{x,z} \cdot dx) \cdot dy) \cdot dz,$$

wo das letzte Integral nach z die willkührliche Konstante C in sich aufnimmt, während α, β beliebig aber von x, y und z unabhängig gedacht sind.

Anmerkung. Es können n solcher Parzialgleichungen der ersten Ordnung mit n abhängigen Veränderlichen, aber einem einzigen unabhängigen Veränderlichen gegeben seyn, denen allen genügt werden soll. — Man erhält $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen der Integrabilität, welche alle erfüllt seyn müssen, wenn die Aufgabe möglich seyn soll.

Und sind diese n Gleichungen alle von der einfachen Form, wie solche in den (§§. 207. u. 300.) vorausgesetzt worden; so haben diese $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen der Integrabilität ebenfalls die in den angeführten (§§.) zu ersehende einfache Form.

Sind z. B. die vier Gleichungen

$$\partial u_t = M_{t,x,y,z}, \quad \partial u_x = N_{t,x,y,z}, \quad \partial u_y = P_{t,x,y,z}, \quad \partial u_z = Q_{t,x,y,z}$$

gegeben; so finden sich folgende 6 Bedingungsgleichungen der Integrabilität, nämlich:

$$(\odot) \cdots \begin{cases} \partial M_x = \partial N_t, & \partial M_y = \partial P_t, & \partial M_z = \partial Q_t, \\ \partial N_y = \partial P_x, & \partial N_z = \partial Q_x, & \partial P_z = \partial Q_y. \end{cases}$$

Sollten aber M, N, P, Q selber noch u enthalten, so daß die Gleichungen nicht mehr nach Anleitung der (§§. 297. und 300.), sondern bloß nach (§§. 296. und 299.) integrirt werden können; so würden doch die 6 Bedingungsgleichungen der Integrabilität wiederum genau dieselben bleiben, wie sie hier in (⊙) zu sehen sind, nur mit dem Unterschiede, daß die Ableitungen von M, N, P, Q, nach allem t, x, y, z, sowohl nach dem, was außerhalb, als auch nach dem, was in u selbst wieder vorkommt, genommen gedacht werden müssen, so daß dieselben 6 Gleichungen (⊙) so wie hier in (ℂ) folgt, geschrieben werden müssen, nämlich:

$$(\mathbb{C})\cdots\begin{cases}\partial M_{(x)}=\partial N_{(t)}, & \partial M_{(y)}=\partial P_{(t)}, & \partial M_{(z)}=\partial Q_{(t)},\\ \partial N_{(y)}=\partial P_{(x)}, & \partial N_{(z)}=\partial Q_{(x)}, & \partial P_{(z)}=\partial Q_{(x)}.\end{cases}$$

Wenn wir aber bis hieher bloß Parzialgleichungen betrachtet haben, in welchen die Ableitungen nur eines einzigen Veränderlichen (nach zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen) vorkommen, so müssen wir auch noch den Fall betrachten:

B. Wenn in den gegebenen Parzialgleichungen die Ableitungen von zwei oder mehr Veränderlichen (und auch nach zwei oder mehr Veränderlichen genommen) vorkommen.

§. 301. Aufgabe.

Es sind zwei Gleichungen

1) $F_{x,y,z,z_{1,1}z,u,u_{1,1}u}=0$ und 2) $F'_{x,y,z,z_{1,1}z,u,u_{1,1}u}=0$

zwischen zweien Funktionen z und u und ihren Ableitungen der ersten Ordnung nach x nnd y, nämlich ∂z_x, ∂z_y, ∂u_x, ∂u_y. gegeben: man soll alle Funktionen $z_{x,y}$, $u_{x,y}$ finden, welche statt z und u gesetzt, beide Gleichungen zugleich identisch machen.

Auflösung. Man differenziire jede der gegebenen Gleichungen $F=0$ und $F'=0$ nach allem x und nach allem y, so lange fort, bis man genug Gleichungen hat, um u und alle ihre Ableitungen nach x und nach y, nämlich:

$$\partial u_x,\ \partial u_y,\ \partial^2 u_x,\ \partial^{1,1} u_{x,y},\ \partial^2 u_y,\ \partial^3 u_x\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

algebraisch eliminiren zu können. Ist dies geschehen, und die Elimination ausgeführt, so hat man eine Gleichung zwischen x, y, z und den Ableitungen von z nach x und nach y, aber von einer höhern als der ersten Ordnung, so daß deren Integration dem folgenden Kapitel vorbehalten bleiben muß.

Ist aber z ganz allgemein (mit willkührlichen Funktionen) gefunden; so findet sich u auf bloß algebraischem Wege, ohne eine neue Integration nöthig zu haben (also auch ohne daß neue willkührliche Funktionen eingeführt werden) dadurch, daß man in eine der letztern Gleichungen, welche bloß u selbst aber keine der Ableitungen mehr enthält, insofern letztere bereits eliminirt worden sind, statt z und dessen Ableitungen, die dafür gefundenen und zu findenden Werthe in x und y (mit den willkührlichen Funktionen) setzt oder gesetzt sich denkt, zuletzt aber die Gleichung nach u auflöst oder aufgelöst sich denkt. (Vgl. §§. 281. u. 282.)

Anmerkung 1. Diese einzige Aufgabe mag hinreichen, um die übrigen alle, nebst der Art, wie sie behandelt werden müssen, angedeutet zu haben. In vorkommenden Einzelfällen wird man sich die Schwierigkeit der Ausführung durch eigene, mehr dem Einzelfalle angehörige Kunstgriffe zu erleichtern suchen müssen, worüber in diesem Augenblick noch nicht näher gesprochen werden kann.

Anmerkung 2. Es können aber auch zur Bestimmung zweier solcher Funktionen z und u mehr als zwei Gleichungen gegeben seyn, so daß die durch die Integration zweier derselben eingehenden willkührlichen Funktionen durch die übrigen Gleichungen eine nähere Bestimmung erhalten können, im Falle die dann existirenden Bedingungen der Integrabilität erfüllt seyn sollten.

Sind z. B. gegeben die 3 Gleichungen

1) $\partial z_x = P_{x,y}$, $\partial u_y = R_{x,y}$, $\partial z_y + \partial u_x = Q_{x,y}$;

so findet man aus (1.) sogleich

4) $z = \int_{x \div \alpha} P \cdot dx + Y$,

so wie aus (2.)...

5) $$u = \int_{y \div \beta} R \cdot dy + X,$$

wo Y eine noch unbestimmte Funktion von y, X aber eine unbestimmte Funktion von x vorstellt.

Weil nun noch die (3) durch diese Werthe von z und u identisch werden muß; so erhält man, wenn man die Werthe aus (4. u. 5.) in die (3.) substituirt

6) $$\partial\left(\int_{x \div \alpha} P \cdot dx\right)_y + \partial Y_y + \partial\left(\int_{y \div \beta} R \cdot dy\right)_x + \partial X_x = Q.$$

Differenziirt man nun diese Gleichung nach x, so erhält man

$$\partial P_y + \partial^2\left(\int_{y \div \beta} R \cdot dy\right)_x + \partial^2 X_x = \partial Q_{x,}$$

oder

7) $$\partial^2 X_z = \partial Q_x - \partial P_y - \partial^2\left(\int_{y \div \beta} R \cdot dy\right)_x.$$

Differenziirt man aber die (6.) nach y, so ergiebt sich

$$\partial^2\left(\int_{x \div \alpha} P \cdot dx\right)_y + \partial^2 Y_y + \partial R_x = \partial Q_y$$

oder

8) $$\partial^2 Y_y = \partial Q_y - \partial R_x - \partial^2\left(\int_{x \div \alpha} P \cdot dx\right)_y.$$

Aus den Gleichungen (7. u. 8.) wird nun X und Y leicht bestimmt. Damit sich aber kein Widerspruch einfinde; so muß der Ausdruck in (7.) zur Rechten kein y enthalten, der Ausdruck in (8.) dagegen kein x, so daß der erstere nach y differenziirt, der andere aber nach x differenziirt Null geben muß.

Differenziirt man aber den erstern nach y oder den andern nach x, so erhält man jedesmal ein und dasselbe Resultat, nämlich

9) $$\partial^{1,1} Q_{x,y} - \partial^2 R_x - \partial^2 P_y = 0.$$

Dieses ist daher die einzige Bedingungsgleichung der Integrabilität, welche von den gegebenen Funktionen P, Q, R erfüllt seyn muß, wenn die Aufgabe selbst möglich seyn soll. (Vgl. Lacroix Traité. T. II. No. 549.)

Höhere Zahlenlehre.

Vierzehntes Kapitel.

Von den Parzial-Differenzialgleichungen der zweiten und höhern Ordnung.

A. Von einer einzigen Parzialgleichung der zweiten und höhern Ordnung.

§. 302. Aufgabe.

Es ist die Gleichung der zweiten Ordnung

$$F_{x,y,z,z_{1,1}z,z_{2,1}z_{1,2}z} = 0$$

zwischen zweien unabhängigen Veränderlichen x, y, einem von diesen abhängigen Veränderlichen z und dessen Ableitungen z_1 oder ∂z_x, $_1z$ oder ∂z_y, z_2 oder $\partial^2 z_x$, $_1z_1$ oder $\partial^{1,1} z_{x,y}$ und $_2z$ oder $\partial^2 z_y$ gegeben: man soll alle Funktionen $z_{x,y}$ finden, welche statt z gesetzt, diese Gleichung $F = 0$ identisch machen.

Auflösung. Man suche wieder z in Form einer unendlichen Reihe

$$1) \quad z_\varkappa \text{ oder } \delta^0 z + \delta z \cdot \varkappa + \delta^2 z \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 z \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots,$$

wo $2) \quad \varkappa = x - \alpha, \quad \text{also} \quad x = \alpha + \varkappa$

ist, wo aber $\delta^0 z$, δz, $\delta^2 z$, ꝛc. unbekannte und gesuchte Koeffizienten, übrigens Funktionen von y sind. Wird aber diese Reihe $z_\varkappa$ statt z gesetzt; so muß man statt z_1 die Reihe

3) $(z_1)_x$ d. h. $\delta^0 z_1 + \delta z_1 \cdot x + \delta^2 z_1 \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 z_1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$
∞

setzen, welche jedoch $= \partial(z_x)_x$ seyn muß, also daß man hat

4) $$\delta^a z_1 = \delta^{a+1} z.$$

Statt ${}_1z$ muß dann gesetzt werden $\partial(z_x)_y$, welche Reihe durch

5) $({}_1z)_x$ d. h. $\delta^0 {}_1z + \delta {}_1z \cdot x + \delta^2 {}_1z \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 {}_1z \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

bezeichnet wird, so daß man hat

6) $$\delta^a {}_1z = \partial(\delta\, z)_y.$$

Ferner müssen dann statt z_2, ${}_1z_1$ und ${}_2z$ beziehlich $\partial^2(z_x)_x$, $\partial^{1,1}(z_x)_{x,y}$, $\partial^2(z_x)_y$ gesetzt, welche 3 Reihen beziehlich durch

7) $(z_2)_x$ d. h. $\delta^0 z_2 + \delta z_2 \cdot x + \delta^2 z_2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 z_1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$,

8) $({}_1z_1)_x$ d. h. $\delta^0 {}_1z_1 + \delta {}_1z_1 \cdot x + \delta^2 {}_1z_1 \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 {}_1z_1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

und

9) $({}_2z)_x$ d. h. $\delta^0 {}_2z + \delta {}_2z \cdot x + \delta^2 {}_2z \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 {}_2z \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

bezeichnet werden, so daß man

10) $$\delta^a z_2 = \delta^{a+2} z,$$

11) $$\delta^a {}_1z_1 = \partial(\delta^{a+1} z)_y,$$

12) $$\delta^a {}_1z = \partial^2(\delta^a z)_y$$

hat. Wird dann zuletzt noch

13) x_x d. h. $\delta^0 x + \delta x \cdot x + \delta^2 x \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 x \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$

nämlich $\alpha + x$ statt x geschrieben, so daß also

14) $\delta^0 x = \alpha$, $\delta x = 1$, $\delta^2 x = \delta^3 x = \text{ꝛc.} = 0$

ist; so soll (der Aufgabe zufolge), wenn man alle diese Reihen in $F = 0$ substituirt, die entstehende Gleichung

15) $F_x = 0$ d. h. $\delta^0 F + \delta F \cdot x + \delta^2 F \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 F \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots = 0$

identisch (für jedes x) gleich 0 werden, also daß man

16) $\delta^0 F = 0,\quad \delta F = 0,\quad \delta^2 F = 0,\quad \delta^3 F = 0,$ ꝛc.

hat, als Gleichungen, welche durch die gesuchten Koeffizienten $\delta^0 z$, δz, $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, ꝛc. identisch werden müssen, welche daher zur Bestimmung dieser Koeffizienten dienen.

I. Nun ist aber nach (§. 253.)

$$\delta^0 F = F_{x,y,z,z_1,{}_1z,z_2,{}_1z_1,{}_2z,}$$

wenn zur Rechten unter

$$x,\quad z,\quad z_1,\quad {}_1z,\quad z_2,\quad {}_1z_1,\quad {}_2z$$
$$\delta^0 x,\ \delta^0 z,\ \delta^0 z_1,\quad \delta^0\,{}_1z,\ \delta^0 z_2,\ \delta^0\,{}_1z_1,\quad \delta^0\,{}_2z$$

verstanden wird, d. h. beziehlich

$$\alpha,\ \delta^0 z,\quad \delta z,\ \partial(\delta^0 z)_y,\ \delta^2 z,\ \partial(\delta z)_y,\ \partial^2(\delta^0 z)_y.$$

Also dient diese erste Gleichung $\delta^0 F = 0$ sogleich zur Bestimmung von $\delta^2 z$, während $\delta^0 z$ und δz ganz willkührlich bleiben, d. h. als zwei willkührliche Funktionen von y angesehen und durch Y_0, Y_1 bezeichnet werden können *).

II. Ferner ist nach (§. 253.)

$$\delta F = \partial F_x\cdot\delta x + \partial F_z\cdot\delta z + \partial F_{z_1}\cdot\delta z_1 + \partial F_{,z}\cdot\delta\,{}_1z + \partial F_{z_2}\cdot\delta z_2 + \\ + \partial F_{,z_1}\cdot\delta\,{}_1z_1 + \partial F_{,z}\cdot\delta\,{}_2z,$$

wo aber statt

$$x,\quad z,\quad z_1,\quad {}_1z,\quad z_2,\quad {}_1z_1,\quad {}_2z$$

wiederum, wie kurz vorher, beziehlich die ersten Glieder der Reihen

$$x_x,\quad z_x,\quad (z_1)_x,\quad ({}_1z)_x,\quad (z_2)_x,\quad ({}_1z_1)_x,\quad ({}_2z)_x,$$

---

*) Fehlte z_2 in F ganz, so fehlte in $\delta^0 F = 0$ auch das Glied $\delta^2 z$; die Gleichung $\delta^0 F = 0$ ließe dann bloß $\delta^0 z$ ganz unbestimmt, bestimmt aber δz durch eine Differenzialgleichung, welche integrirt, doch noch eine willkührliche Konstante hineinzöge. — Fehlte z_2 und ${}_1z_1$ zugleich in F, so fehlte auch $\delta^2 z$ und $\partial(\delta z)_y$ in $\delta^0 F$, und es bliebe bloß $\delta^0 z$ ganz unbestimmt, während δz nicht einmal mehr eine Konstante in sich aufnehmen würde, so daß nun bloß eine willkührliche Funktion Y_0 einginge Und fehlten z_1, z_2 so wie ${}_1z_1$ zu gleicher Zeit, so bestimmte sich $\delta^0 z$ mit zwei willkührlichen Konstanten; allein man hätte dann genau bloß die Aufgabe des (§. 271.), und daher auch genau die dortige Auflösung.

dagegen statt $\delta x,\ \delta z_1,\quad \delta_1 z,\ \delta z_2,\quad \delta_1 z_1,\quad \delta_2 z$

beziehlich $\alpha,\ \delta^2 z,\ \partial(\delta z)_y,\ \delta^3 z,\ \partial(\delta^2 z)_y,\ \partial^2(\delta z)_y$

geschrieben werden muß. Daraus erhellet aber, wie diese Gleichung $\delta F = 0$ zur Bestimmung von $\delta^3 z$ dient.

III. Man erkennt ferner sogleich, wie in jede der folgenden Gleichungen $\delta^2 F = 0$, $\delta^3 F = 0$, ꝛc. nach den Gesetzen der Variationsrechnung (§. 253.) auch allemal beziehlich die Koeffizienten

$$\delta^2 z_2 \text{ d. h. } \delta^4 z, \qquad \delta^3 z_2 \text{ d. h. } \delta^5 z, \text{ ꝛc.}$$

eingehen; so daß durch jede der folgenden dieser Gleichungen auch jeder der folgenden Koeffizienten $\delta^3 z$, $\delta^4 z$, ꝛc. seine völlige Bestimmung erhält, also daß im Allgemeinen nur $\delta^0 z = Y_0$ und $\delta z = Y_1$ als völlig willkührliche Funktionen von y unbestimmt bleiben.

IV. Hat man aber auf diese Weise $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, $\delta^4 z$, ꝛc. in $\delta^0 z = Y_0$, $\delta z = Y_1$ und in die Ableitungen dieser letztern ausgedrückt; so ist

$$17)\quad z = z_x \text{ d. h. } z = Y_0 + Y_1 \cdot (x-\alpha) + \delta^2 z \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$$

das gesuchte allgemeine Integral von $F = 0$, welches alle besonderen Integrale in sich schließt, aber nicht die etwa noch existirenden singulären Werthe, welche der $F = 0$ ebenfalls genügen, aber die Gleichungen $\delta F = 0$ oder $\delta^2 F = 0$ oder $\delta^3 F = 0$, ꝛc. entweder identisch machen, oder vielmehr auf die Form $\frac{0}{0} = 0$ bringen, so daß dann letztere Gleichungen die Koeffizienten $\delta^3 z$, $\delta^4 z$, ꝛc. unbestimmt lassen.

Anmerkung. So wie in den (§§. 266. 272. 277. 283. Anmkg.), so kann man auch hier das allgemeine Integral z sogleich unmittelbar durch den Maclaurin'schen Lehrsatz erhalten, nämlich:

$$z = [z_x]_\alpha + [\partial z_x]_\alpha \cdot \frac{x-\alpha}{1} + [\partial^2 z_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots,$$

wo $[z_x]_\alpha$, $[\partial z_x]_\alpha$ als völlig willkührliche und unbestimmt blei-

bende Funktionen von y angesehen werden müssen, während $[\partial^2 z_x]_\alpha$, $[\partial^3 z_x]_\alpha$, ꝛc. dann aus der Gleichung $F = 0$ und aus ihren Ableitungsgleichungen (nach x und nach y genommen) ihre Bestimmung erhalten.

Aber die Bemerkungen, welche in den angeführten (§§.) hinsichtlich dieses Verfahrens gemacht werden mußten, dürfen auch hier nicht übersehen werden.

§. 303. Zusatz.

Ganz auf dieselbe Weise kann man das allgemeine Integral von $F = 0$ auch in der Form

$$(\mathfrak{d}) \cdots \quad z = X_0 + X_1 \cdot \frac{y-\beta}{1} + \delta^2 z \cdot \frac{(y-\beta)^2}{2!} + \delta^3 z \cdot \frac{(y-\beta)^3}{3!} + \cdots$$

herstellen, wo X_0, X_1 ganz willkührliche Funktionen von x sind, während $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, ꝛc. jetzt aus $F = 0$ gefundene bestimmte Zusammensetzungen von X_0, X_1 und deren Ableitungen nach x vorstellen.

Hernach kann man die Koeffizienten der Reihe (17. des §. 302. IV.) in Reihen verwandeln die nach Potenzen von $y-\beta$ fortlaufen. Dann erhält man das allgemeine Integral von $F = 0$ in der Form einer Doppelreihe (Reihe der 2ten Ordnung)

$$(\mathfrak{C}) \qquad z = S\left[A_{a,b} \cdot \frac{(x-\alpha)^a}{a!} \cdot \frac{(y-\beta)^b}{b!}\right],$$

wo aber die Koeffizienten

$$A_{0,b} \quad \text{und} \quad A_{1,b}$$

für jedes b, welches positiv ganz oder Null ist, völlig willkührlich bleiben, während die folgenden Reihen der Koeffizienten, nämlich $A_{2,b}$, $A_{3,b}$, $A_{4,b}$, ꝛc. aus jenen zusammengesetzt erscheinen werden.

Oder man kann die Koeffizienten der Reihe ($\mathfrak{d}$) in Reihen verwandeln, welche nach Potenzen von $(x-\alpha)$ fortlaufen. Dann erhält man, der Form nach, dieselbe Doppelreihe ($\mathfrak{C}$) wieder, nur daß jetzt die beiden Koeffizientenreihen

$$A_{a,0} \quad \text{und} \quad A_{a,1}$$

ganz willkührlich und unbestimmt bleiben, und die übrigen Reihen der Koeffizienten $A_{a,2}$, $A_{a,3}$, $A_{a,4}$, ꝛc. Zusammensetzungen aus den eben genannten seyn werden, wie solche Zusammensetzungen durch $F = 0$ bestimmt sind. (Vgl. §§. 284. 285.)

Anmerkung. Dies im Allgemeinen. Fehlt aber in $F = 0$ der Ausdruck z_2 d. h. $\partial^2 z_x$: so enthält das allgemeine Integral, in der Form einer nach Potenzen von $(x-\alpha)$ fortlaufenden Reihe, nur eine willkührliche Funktion von y, außerdem aber in den folgenden Koeffizienten noch eine willkührliche Konstante; während dasselbe allgemeine Integral in der andern Form (𝔇 des §. 303.), nämlich in der Form einer nach Potenzen von $y-\beta$ fortgehenden Reihe, doch noch zwei willkührliche Funktionen von x aufzeigt, wenn nicht zugleich auch das Glied ${}_2z$ d. h. $\partial^2 z_y$ in $F = 0$ fehlt; so daß in $F = 0$ bloß das einzige Glied $\partial^{1,1} z_{x,y}$ von der zweiten Ordnung vorkäme, in welchem Falle die zweite Form genau dieselben Erscheinungen darbieten würde, welche bereits die erstere Form gezeigt hat.

Fehlt aber z_2 oder $\partial^2 z_x$ und ${}_1z_1$ oder $\partial^{1,1} z_{x,y}$ in $F = 0$ zu gleicher Zeit; so bleibt in der Reihe nach $x-\alpha$ bloß eine einzige Funktion von y und sonst weiter nichts willkührlich, während in demselben Falle die andere (nach $y-\beta$ fortlaufende) Form des Integrals doch noch zwei willkührliche Funktionen von x nachweist. Aehnliches, aber umgekehrt, zeigt sich, wenn $\partial^2 z_y$ und $\partial^{1,1} z_{x,y}$ zu gleicher Zeit in $F = 0$ fehlen sollten.

Endlich kann man im allgemeinen Fall, so wie auch in jedem der hier noch erwähnten besondern Fälle, von der erstern Form, in welcher die Reihe nach Potenzen von $x-\alpha$ fortläuft, zu der andern, wo dasselbe allgemeine Integral von $F = 0$ in Form einer nach Potenzen von $y-\beta$ fortlaufenden Reihe erscheint, und umgekehrt von der letztern zur erstern gelangen, indem man die Doppelreihe (ℭ des §. 302.) zu Hilfe nimmt, d. h. die eine dieser Formen in diese Doppelreihe (ℭ) verwandelt, dann aber

die Doppelreihe wieder als einfache Reihe schreibt, und die Koeffizienten summirt *).

§. 304. Zusatz.

In den Fällen, wo das allgemeine Integral von $F=0$ in endlicher Form erscheinen kann, muß solches, dem (§. 303.) zu Folge, allemal zwei willkührliche Funktionen von x und y aufnehmen, welche jedoch nicht ganz willkührlich seyn dürfen, wie sich, dem früher bereits hierüber Gesagten gemäß, leicht erkennen läßt. — Ja, dieselben Betrachtungen, welche bereits (§. 286.) angestellt worden sind, führen uns sogleich dahin einzusehen, daß diese beiden willkührlichen Funktionen im Allgemeinen die Form

$$\varphi_\omega \quad \text{und} \quad \psi_{\omega'}$$

haben, d. h. willkührliche Funktionen eines einzigen Veränderlichen ω oder ω' seyn müssen, während ω und ω' noch zu bestimmende Funktionen von x und y seyn werden, die jedoch auch x und y implizit (in z) enthalten können.

Aber selbst diese Beschränkungen reichen noch nicht aus. Man hat nämlich, außer dem allgemeinen Integral

1) $$W_{x,y,z} = 0$$

noch 5 Ableitungsgleichungen desselben

2) $\partial W_{(x)} = 0$, 3) $\partial W_{(y)} = 0$, 4) $\partial^2 W_{(x)} = 0$,
5) $\partial^{1,1} W_{(x,y)} = 0$, 6) $\partial^2 W_{(y)} = 0$,

aus welchen 6 Gleichungen sowohl z als auch die Ableitungen ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$ bestimmt werden müssen; so daß, wenn man diese 6 Werthe in $F=0$ substituirt, letztere

---

*) Dieses Verfahren hat, wie wir schon in der Note zur Anmerkg. zum (§. 285.) bemerklich gemacht haben, auch Poisson für das spezielle Beispiel, in welchem statt

$$F_{x,y,z,z_{1,1},z_{2,1},z_{1,2}} = 0,$$

bloß $\partial^2 z_y - \partial z_x = 0$ gegeben ist, insbesondere nachgewiesen, ganz so, wie in der eben angeführten Note bemerklich gemacht ist. (S. Lacroix Traité. T. II. pag. 642.).

Gleichung identisch $0=0$ werden, also aus F alles, was von den willkührlichen Funktionen φ_ω und $\psi_{\omega'}$ herrührt, sich weghében muß. Enthält nun W die willkührlichen Funktionen φ_ω und $\psi_{\omega'}$, so werden $\partial W_{(x)}$ und $\partial W_{(y)}$ im Allgemeinen außer φ_ω und $\psi_{\omega'}$ auch noch die unbestimmten Ableitungen $\partial\varphi_\omega$ und $\partial\psi_{\omega'}$ enthalten, während dann in $\partial^2 W_{(x)}$, $\partial^{1,1} W_{(x,y)}$ und $\partial^2 W_{(y)}$ außer φ_ω, $\psi_{\omega'}$, $\partial\varphi_\omega$, $\partial\psi_{\omega'}$ auch noch die zweiten Ableitungen $\partial^2\varphi_\omega$ und $\partial^2\psi_{\omega'}$ vorkommen werden. Diese 6 unbestimmten und willkührlichen Ausdrücke φ, ψ, $\partial\varphi_\omega$, $\partial\varphi_{\omega'}$, $\partial^2\varphi_\omega$, $\partial^2\psi_{\omega'}$, lassen sich aber nur dann aus den 6 Gleichungen $W=0$, $\partial W_{(x)}=0$, $\partial W_{(y)}=0$, $\partial^2 W_{(x)}=0$, $\partial^{1,1} W_{(x,y)}=0$, $\partial^2 W_{(y)}=0$ eliminiren, so daß der Gleichung $F=0$ durch $W=0$ genügt wird, wenn sie sich auf nur 5 (nicht mehr und nicht weniger) unbestimmte Ausdrücke zurückführen lassen.

Aus diesen Gründen muß dieses in endlicher Form gesuchte allgemeine Integral der Parzialgleichung $F=0$ der 2ten Ordnung im Allgemeinen die Form

$$W_{x,y,z,\nu}=0, \quad \text{wo} \begin{cases} \text{entweder} & \nu=\varphi_\omega+\psi_{\omega'} \\ \text{oder} & \nu=\omega'\cdot\varphi_\omega+\psi_\omega \end{cases} \text{ist,}$$

haben, wobei W eine bestimmte Zusammensetzung aus x,y,z und ν ist, während ω und ω' ebenfalls bestimmte, von der gegebenen Parzialgleichung $F=0$ abhängige Funktionen von x und y sind, welche jedoch x und y implizit enthalten, d. h. welche auch z in sich aufnehmen können, so daß nur φ_ω und $\psi_{\omega'}$ oder ψ_ω ganz willkührliche Funktionen vorstellen.

Es folgt nämlich aus

1) $$W_{x,y,z,\nu}=0$$

sogleich

2) $\partial W_{(x)}=0$, d. h. $\partial W_x+\partial W_z\cdot\partial z_x+\partial W_\nu\cdot\partial\nu_{(x)}=0$,

3) $\partial W_{(y)}=0$, d. h. $\partial W_y+\partial W_z\cdot\partial z_y+\partial W_\nu\cdot\partial\nu_{(y)}=0$,

4) $\partial^2 W_{(x)}=0$, d. h. $\partial^2 W_x+2\partial^{1,1} W_{x,z}\cdot\partial z_x+$
$+\partial^2 W_z\cdot\partial z_x^2+\partial W_z\cdot\partial^2 z_x+2\partial^{1,1} W_{x,\nu}\cdot\partial\nu_{(x)}+$
$+2\partial^{1,1} W_{z,\nu}\cdot\partial z_x\cdot\partial\nu_{(x)}+\partial^2 W_\nu\cdot\partial\nu_{(x)}^2+\partial W_\nu\cdot\partial^2\nu_{(x)}=0$,

$$5)\ \partial^{1,1}W_{(x,y)} = 0,\quad \text{d. h. } \partial^{1,1}W_{x,y}+\partial^{1,1}W_{x,z}\cdot\partial z_y+$$
$$+\partial^{1,1}W_{x,v}\cdot\partial v_{(y)}+\partial^{1,1}W_{y,z}\cdot\partial z_x+\partial^2 W_z\cdot\partial z_x\cdot\partial z_y+$$
$$+\partial^{1,1}W_{z,v}\cdot\partial z_x\cdot\partial v_{(y)}+\partial^{1,1}W_{y,v}\cdot\partial v_{(x)}+\partial^{1,1}W_{z,v}\cdot\partial z_y\cdot\partial v_{(x)}+$$
$$+\partial^2 W_v\cdot\partial v_{(x)}\cdot\partial v_{(y)}+\partial W_z\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}+\partial W_v\cdot\partial^{1,1}v_{(x,y)} = 0,$$

$$6)\ \partial^2 W_{(y)} = 0,\ \text{d. h. } \partial^2 W_y+2\partial^{1,1}W_{y,z}\cdot\partial z_y+\partial^2 W_z\cdot\partial z_y^2+$$
$$+\partial W_z\cdot\partial^2 z_y+2\partial^{1,1}W_{y,v}\cdot\partial v_{(y)}+2\partial^{1,1}W_{z,v}\cdot\partial z_y\cdot\partial v_{(y)}+$$
$$+\partial^2 W_v\cdot\partial v_{(y)}^2+\partial W_v\cdot\partial v_{(y)}^2 = 0$$

Ist nun I. $v = \varphi_\omega+\psi_{\omega'}$,

so hat man

$$\partial v_{(x)} = \partial\varphi_\omega\cdot\partial\omega_{(x)}+\partial\psi_{\omega'}\cdot\partial\omega'_{(x)},$$
$$\partial v_{(y)} = \partial\varphi_\omega\cdot\partial\omega_{(y)}+\partial\psi_{\omega'}\cdot\partial\omega'_{(y)},$$
$$\partial^2 v_{(x)} = \partial^2\varphi_\omega\cdot\partial\omega_{(x)}^2+\partial\varphi_\omega\cdot\partial^2\omega_{(x)}+\partial^2\psi_{\omega'}\cdot\partial\omega'^2_{(x)}+$$
$$+\partial\psi_{\omega'}\cdot\partial^2\omega'_{(x)},$$
$$\partial^{1,1}v_{(x,y)} = \partial^2\varphi_\omega\cdot\partial\omega_{(x)}\cdot\partial\omega_{(y)}+\partial\varphi_\omega\cdot\partial^{1,1}\omega_{(x,y)}+$$
$$+\partial^2\psi_{\omega'}\cdot\partial\omega'_{(x)}\cdot\partial\omega'_{(y)}+\partial\psi_{\omega'}\cdot\partial^{1,1}\omega'_{(x,y)},$$
$$\partial^2 v_{(y)} = \partial^2\varphi_\omega\cdot\partial\omega_{(y)}^2+\partial\varphi_\omega\cdot\partial^2\omega_{(y)}+\partial^2\psi_{\omega'}\cdot\partial\omega'^2_{(y)}+$$
$$+\partial\psi_{\omega'}\cdot\partial^2\omega'_{(y)}.$$

Ist aber II. $v = \omega'\cdot\varphi_\omega+\psi_\omega$,

so hat man

$$\partial v_{(x)} = \varphi_\omega\cdot\partial\omega'_{(x)}+(\omega'\cdot\partial\varphi_\omega+\partial\psi_\omega)\cdot\partial\omega_{(x)},$$
$$\partial v_{(y)} = \varphi_\omega\cdot\partial\omega'_{(y)}+(\omega'\cdot\partial\varphi_\omega+\partial\psi_\omega)\cdot\partial\omega_{(y)},$$
$$\partial^2 v_{(x)} = \varphi_\omega\cdot\partial^2\omega'_{(x)}+2\partial\varphi_\omega\cdot\partial\omega_{(x)}\cdot\partial\omega'_{(x)}+$$
$$+(\omega'\cdot\partial^2\varphi_\omega+\partial^2\psi_\omega)\cdot\partial\omega_{(x)}^2+(\omega'\cdot\partial\varphi_\omega+\partial\psi_\omega)\cdot\partial^2\omega_{(x)},$$
$$\partial^{1,1}v_{(x,y)} = \varphi_\omega\cdot\partial^{1,1}\omega'_{(x,y)}+\partial\varphi_\omega\cdot\partial\omega_{(y)}\cdot\partial\omega'_{(x)}+\partial\varphi_\omega\cdot\partial\omega_{(x)}\cdot\partial\omega'_{(y)}+$$
$$+(\omega'\cdot\partial^2\varphi_\omega+\partial^2\psi_\omega)\cdot\partial\omega_{(x)}\cdot\partial\omega_{(y)}+(\omega'\cdot\partial\varphi_\omega+\partial\psi_\omega)\cdot\partial^{1,1}\omega_{(x,y)},$$
$$\partial^2 v_{(y)} = \varphi_\omega\cdot\partial^2\omega'_{(y)}+2\partial\varphi_\omega\cdot\partial\omega_{(y)}\cdot\partial\omega'_{(y)}+$$
$$+(\omega'\cdot\partial^2\varphi_\omega+\partial^2\psi_\omega)\cdot\partial\omega_{(y)}^2+(\omega'\cdot\partial\varphi_\omega+\partial\psi_\omega)\cdot\partial^2\omega_{(y)}.$$

In dem Falle (I.) kann man nun aus den 6 Gleichungen (1.—6.) die 5 willkührlichen Ausdrücke v, $\partial\varphi_{\omega'}$, $\partial^2\varphi_{\omega'}$, $\partial\psi_{\omega'}$, $\partial^2\psi_{\omega'}$ ohne weiteres eliminiren. Aber auch in dem Falle (II.) kommen in

den 6 Gleichungen (1.—6.) nur die 5 von den willkührlichen Funktionen φ_ω und ψ_ω abhängigen Ausdrücke, nämlich ν, φ_ω, $\partial\varphi_\omega$, $\omega'\cdot\partial\varphi_\omega+\partial\psi_\omega$ und $\omega'\cdot\partial^2\varphi_\omega+\partial^2\psi_\omega$ vor, welche alle 5 ebenfalls eliminirt werden können, so daß in der Endgleichung von den willkührlichen Funktionen φ und ψ keine Spur mehr zu finden ist *).

§. 305. Zusatz.

Dabei ist es nicht schwer, wenn man die übrigen Formen, welche das allgemeine Integral, den Resultaten der (§§. 302. u. 303.) zu Folge, möglicher Weise noch haben könnte, in Erwägung zieht, sich zu überzeugen, daß das allgemeine Integral, sobald es nicht in unendlichen Reihen ausgedrückt ist, oder in Symbolen derselben, allemal auf die Form

$$W_{x,y,z,\nu}=0, \quad \text{wo} \begin{cases}\text{entweder} & \nu=\varphi_\omega+\psi_{\omega'}\\ \text{oder} & \nu=\omega'\cdot\varphi_\omega+\psi_\omega\end{cases}\text{ist,}$$

gebracht werden könne.

Auch fällt sehr bald in die Augen, daß, wenn man $\nu=\varphi_\omega+\psi_{\omega'}$ voraussetzt, dann ω und ω' dazu sucht, und nun für ω und ω' sich gleiche Werthe ergeben, — daß dann die andere Form $\nu=\omega'\cdot\varphi_\omega+\psi_\omega$ statt finden müsse.

Beispiel 1. So findet sich zu der Parzialgleichung der zweiten Ordnung

$$1)\ \frac{x+y}{x-y}\cdot z\cdot(\partial z_x-\partial z_y)+x\cdot(1-\partial z_x^2-z\cdot\partial^2 z_x)+y\cdot(1-\partial z_y^2-z\cdot\partial^2 z_y)+$$
$$+(x+y)\cdot(-1+\partial z_x\cdot\partial z_y+z\cdot\partial^{1,1}z_{x,y})=0$$

---

*) Und man kann nicht sagen, daß, da φ und ψ ganz willkührliche Funktionen sind, die Summe $\varphi_\omega+\psi_{\omega'}$ nur eine einzige willkührliche Funktion vorstellen könne; denn φ ist eine Funktion von ω, dagegen ist ψ eine Funktion von ω', während ω und ω' im allgemeinen von einander verschieden seyn werden. Gerade dann, wenn letztere, nämlich ω und ω', einander gleich werden sollten, nimmt ν die andere Form $\omega'\varphi_\omega+\psi_\omega$ an, weil nun die erstere Form in $\varphi_\omega+\psi_\omega$ übergehen und nur eine einzige willkührliche Funktion bilden würde.

das allgemeine Integral

2) $x^2+y^2+z^2+\varphi_\omega+\psi_{\omega'}=0$,

wenn $\omega = x+y$ und $\omega' = x\cdot y$ genommen wird.

Beispiel 2. Desgleichen hat die Parzialgleichung

1') $(x^2+y^2)^2\cdot[\partial z_x^2-\partial z_y^2+z\cdot(\partial^2 z_x-\partial^2 z_y)]-$
$-4(x^2+y^2)\cdot z\cdot(x\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y)+4(x^2-y^2)\cdot z^2=0$

zum allgemeinen Integral

2') $z^2+(x^2+y^2)(\varphi_\omega+\psi_{\omega'})=0$,

wenn man $\omega = x+y$, $\omega' = x-y$ nimmt.

Beispiel 3. Ferner ist von der Parzialgleichung

1'') $z-x\cdot\partial z_x-y\cdot\partial z_y+x^2\cdot\partial^2 z_x-y^2\cdot\partial^2 z_y=0$

das allgemeine Integral

2'') $z = x\cdot(\varphi_\omega+\psi_{\omega'})$,

wenn $\omega = \frac{y}{x}$ und $\omega' = x\cdot y$ gedacht wird.

Beispiel 4. Die Parzialgleichung

$xz\cdot(\partial^2 z_x-2\partial^{1,1}z_{x,y}+\partial^2 z_y) = 2(\partial z_x-\partial z_y)\cdot[x\cdot(\partial z_x-\partial z_y)-z]$

hat dagegen zum allgemeinen Integral

$z = x\cdot(z\cdot\varphi_\omega+\psi_\omega)$, wo $\omega = x+y$ ist.

Beispiel 5. Die Parzialgleichung

$$2(1-\partial z_x\cdot\partial z_y)\cdot\left(\frac{z\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}}{\partial z_x-\partial z_y}+\partial z_x\right)-\partial^2 z_x\cdot(1-\partial z_y^2)\cdot\frac{z}{\partial z_x-\partial z_y}-$$
$$-\partial^2 z_y\cdot(1-\partial z_y^2)\cdot\left(\frac{z}{\partial z_x-\partial z_y}+y(1-\partial^2 z_y)+2\partial z_y-2\frac{z}{y}\right)=0$$

hat jedoch das allgemeine Integral

$z = y\cdot(\varphi_\omega+\psi_{\omega'})$,

wo $\omega = x+y+z$, und $\omega' = x+y-z$ ist.

Anmerkung. Daß man dasselbe allgemeine Integral

1) $W_{x,y,z,v}=0$, wo $\left\{\begin{array}{ll}\text{entweder} & v=\varphi_\omega+\psi_{\omega'}\\ \text{oder} & v=\omega'\cdot\varphi_\omega+\psi_\omega\end{array}\right\}$ ist,

nach v algebraisch auflösen und dann in der Form

2) $v = f_{x,y,z}$ oder $f_{x,y,z}+v=0$

schreiben könne, erleidet dabei keinen Zweifel.

Namentlich hat in den vorliegenden Beispielen das Integral (2.) bereits diese Form, während das Integral (2′) auch

$$\frac{z^2}{x^2+y^2}+\varphi_\omega+\psi_{\omega'}=0 \qquad \text{oder} \qquad \varphi_\omega+\psi_{\omega'}=\frac{z^2}{x^2+y^2},$$

und das Integral (2″) auch

$$\frac{z}{x}=\varphi_\omega+\psi_{\omega'} \qquad \text{oder} \qquad \frac{z}{x}+\varphi_\omega+\psi_{\omega'}=0$$

geschrieben werden kann. — Desgleichen kann das Integral des Beispiels (4.) auch geschrieben werden

$$\frac{z}{x}=z\cdot\varphi_\omega+\psi_\omega \qquad \text{oder} \qquad \frac{z}{x}+z\cdot\varphi_\omega+\psi_{\omega'}=0.$$

§. 306. Zusatz.

I. In dem allgemeinen Integral

$$1)\quad W_{x,y,z,v}=0, \quad \text{wo} \begin{cases} \text{entweder} & v=\varphi_\omega+\psi_{\omega'} \\ \text{oder} & v=\omega'\cdot\varphi_\omega+\psi_\omega \end{cases} \text{ist,}$$

sind aber wieder alle besonderen Integrale von $F=0$ enthalten, und letztere gehen aus ersterem hervor, wenn man statt der willkührlichen Funktionen φ_ω und $\psi_{\omega'}$ irgend bestimmte Funktionen von ω oder ω' schreibt. — Auch hat man schon besondere Integrale, wenn man nur statt einer der willkührlichen Funktionen φ und ψ, eine bestimmte schreibt, die andere aber willkührlich läßt; so daß also ein Integral in endlicher Form von einer Parzialgleichung der 2ten Ordnung, mit einer einzigen willkührlichen Funktion, allemal schon ein besonderes ist.

Die Parzialgleichung (1.) des (Beispiel 1. zu §. 304.) hat daher noch die besonderen Integrale

$x^2+y^2+z^2=0$, $x^2+y^2+z^2=r^2$, $x^2+y^2+z^2+a\cdot(x+y)=0$,

$x^2+y^2+z^2+axy=0$, $x^2+y^2+z^2+\psi_{\omega'}+a(x+y)=0$,

$x^2+y^2+z^2+\varphi_\omega+axy=0$, $x^2+y^2+z^2+a(x+y)+bxy=0$,

$$(x-a)^2+(y-a)^2+z^2=\frac{r^2}{\sqrt{xy}}$$

und dergleichen in das Unendliche fort.

Eben so hat die Parzialgleichung (1′) des (Beispiels 2. zu §. 304.) noch die besonderen Integrale

$$z^2+ax^2+ay^2=0, \quad z^2+2x(x^2+y^2)=0, \quad z^2+2y(x^2+y^2)=0,$$

$$z^2+(x^2+y^2)(ax+by)=0, \quad z^2+2(x^2+y^2)^2=0, \quad z=x^2+y^2,$$

$$z^2+(x^2+y^2)\cdot[a(x+y)^2+\psi_{\omega'}]=0,$$

$$z^2+(x^2+y^2)\cdot[a(x-y)+\varphi_{\omega}]=0,$$

und dergleichen in das Unendliche fort.

Die Parzialgleichung (1″) des (Beispiels 3. zu §. 304.) hat auch noch die besonderen Integrale

$$z=x\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{x\cdot y}\right), \quad z=x\cdot\left(\frac{x}{y}+x\cdot y\right), \quad z=ax\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{1}{xy}\right),$$

$$z=x\cdot\left(\frac{ax}{y}+\frac{b}{xy}\right), \quad z=y+x\cdot\psi_{\omega'}, \quad z=x\cdot\varphi_{\omega}+\frac{b}{y},$$

und dgl. mehr in das Unendliche fort.

II. Das allgemeine Integral

$$W_{x,y,z,\nu}=0, \quad \text{wo} \begin{cases} \text{entweder} & \nu=\varphi_{\omega}+\psi_{\omega'} \\ \text{oder} & \nu=\omega'\cdot\varphi_{\omega}+\psi_{\omega} \end{cases} \text{ist,}$$

der Parzialgleichung der 2ten Ordnung $F=0$, bleibt eben so allgemein,

A) im Falle $\nu=\varphi_{\omega}+\psi_{\omega'}$ ist:

1) wenn statt ω irgend eine Funktion von ω, und auch statt ω' irgend eine Funktion von ω' gesetzt wird; oder auch

2) wenn statt φ_{ω} irgend eine Funktion von ω und φ_{ω}, so wie statt $\psi_{\omega'}$ irgend eine Funktion von ω' und $\psi_{\omega'}$ geschrieben wird;

B) im Falle $\nu=\omega'\cdot\varphi_{\omega}+\psi_{\omega'}$ ist:

1) wenn statt ω irgend eine Funktion von ω gesetzt wird; oder

2) wenn statt φ_{ω} und ψ_{ω} beliebige Funktionen von ω und φ_{ω} oder von ω und ψ_{ω} geschrieben werden; auch

3) wenn statt ψ_{ω} auf's neue die Form $\omega'\cdot\pi_{\omega}+\chi_{\omega}$ gesetzt wird, wo π_{ω}, χ_{ω} willkührliche Funktionen von ω vorstellen.

Also kann das allgemeine Integral (2) im (Beispiel 1. zu §. 304.) auch

$$x^2+y^2+z^2+(x+y)\cdot\varphi_\omega+\frac{\psi_{\omega'}}{xy}+a=0, \quad \text{wo} \quad \omega=x+y, \quad \omega'=xy$$

geschrieben werden, und es ist in dieser Form weder mehr noch weniger allgemein als in der dortigen Form.

Desgleichen kann man das allgemeine Integral (2′) im (Beispiel 2. zu §. 304.) auch

$$z^2+(x^2+y^2)\cdot[(x+y)\cdot\varphi_\omega+(x-y)\cdot\psi_{\omega'}+ax+by+c]=0$$

schreiben, und es ist diese Form weder mehr noch weniger allgemein als die dortige (2′), man mag übrigens $\omega=x+y$ oder statt ω eine Funktion von $x+y$, etwa $(x+y)^2$ oder $a\cdot\sqrt{x+y}$ oder $\frac{b}{x+y}$ ꝛc. setzen, während $\omega'=x-y$ genommen, oder statt ω' jede Funktion von $x-y$ gesetzt werden kann.

§. 307. Zusatz.

Ist das allgemeine Integral der Parzialgleichung der 2ten Ordnung $F=0$ der Form nach bekannt und gegeben, nämlich

$$1)\quad W_{x,y,z,v}=0, \quad \text{wo} \begin{cases} \text{entweder} & v=\psi_{\omega'}+\varphi_\omega \\ \text{oder} & v=\omega'\cdot\psi_\omega+\varphi_\omega \end{cases} \text{ist,}$$

so kann man mit Hilfe nachstehender Betrachtungen ω und ω' dazu finden. Denkt man sich nämlich o statt ψ und ω statt φ in (1.) gesetzt, so erhält man das besondere Integral

$$2)\qquad W_{x,y,z,\omega}=0.$$

Eliminirt man daher aus dieser Gleichung und aus deren Ableitungen

$$3)\quad \partial W_{(x)}=0,$$
$$\text{d. h.}\quad \partial W_x+\partial W_z\cdot\partial z_x+\partial W_\omega\cdot(\partial\omega_x+\partial\omega_z\cdot\partial z_x)=0,$$

$$4)\quad \partial W_{(y)}=0,$$
$$\text{d. h.}\quad \partial W_y+\partial W_z\cdot\partial z_y+\partial W_\omega\cdot(\partial\omega_y+\partial\omega_z\cdot\partial z_y)=0,$$

$$5)\ \partial^2 W_{(x)}=0, \quad 6)\ \partial^{1,1} W_{(x,y)}=0 \quad \text{und} \quad 7)\ \partial^2 W_{(y)}=0,$$

so wie noch aus $F=0$ die 6 Unbekannten ω, ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$: so erhält man eine Gleichung

8) $$\Omega = 0$$

zwischen $x, y, z, \partial\omega_x, \partial\omega_y, \partial\omega_z, \partial^2\omega_x, \partial^2\omega_y, \partial^2\omega_z, \partial^{1,1}\omega_{x,y}, \partial^{1,1}\omega_{x,z}, \partial^{1,1}\omega_{y,z}$, welche zur Bestimmung von ω dient, und welche, weil ihr $\omega =$ const. genügen muß, kein Glied enthalten kann, welches nicht mit Ableitungen von ω affizirt wäre.

Denkt man sich nun unter ω eine bestimmte Funktion vorgestellt, welche dieser letztern Gleichung (8.) entspricht; so muß (nach §. 306.) diese letztere Gleichung (8.) für denselben Werth von ω noch identisch werden, auch wenn man φ_ω statt ω schreibt (also $\partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_x$ statt $\partial\omega_x$, $\partial\varphi_\omega \cdot \partial^2\omega_x + \partial^2\varphi_\omega \cdot \partial\omega_x^2$ statt $\partial^2\omega_x$, 2c. 2c.) während φ_ω eine ganz willkührliche Funktion von ω ist, also daß $\partial\varphi_\omega$, $\partial^2\varphi_\omega$, 2c. eben so willkührlich und den Werthen nach von einander ganz unabhängig sind. Substituirt man daher wirklich in diese letztere Gleichung (8.) die Ableitungen von φ_ω statt der Ableitungen von ω; so wird wegen der Willkührlichkeit von $\partial\varphi_\omega$, $\partial^2\varphi_\omega$ die Gleichung in mehrere einzelne zerfallen, und es muß dann ω so gefunden werden, daß allen diesen einzelnen Gleichungen zu gleicher Zeit genügt wird.

Findet man nun zwei verschiedene Werthe, von denen keiner eine Funktion des andern ist, welche statt ω gesetzt, allen diesen Gleichungen zugleich genügen; so ist das allgemeine Integral von der ersten Form des (§. 305.), nämlich

$$W_{x,y,z,\nu} = 0, \quad \text{wo} \quad \nu = \psi_{\omega'} + \varphi_\omega \quad \text{ist,}$$

und der eine der gefundenen Werthe ist dann statt ω', der andere dagegen statt ω zu nehmen.

Kann aber nachgewiesen werden, daß nicht zwei solche Werthe für ω existiren; so hat das allgemeine Integral die zweite Form (des §. 305.), nämlich

$$W_{x,y,z,\nu} = 0, \quad \text{wo} \quad \nu = \omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega \quad \text{ist,}$$

und es muß dann noch ω' dazu gefunden werden.

Vermuthet man endlich im Voraus schon, daß ω und ω' kein z enthalten werden, so wird die im allgemeinen ziemlich mühsame Rechnung sogleich einfacher.

Beispiel 1. Hat man für die Parzialgleichung

1) $$z - x\cdot\partial z_x - y\cdot\partial z_y + x^2\cdot\partial^2 z_x - y^2\cdot\partial^2 z_y = 0$$

das allgemeine Integral in der Form

2) $$z = x\cdot\nu$$

ausgedrückt, so erhält man aus

$$z = x\cdot\omega,$$

wenn man in ω selbst kein z mehr voraussetzt, die Ableitungen

$$\partial z_x = \omega + x\cdot\partial\omega_x, \qquad \partial z_y = x\cdot\partial\omega_y,$$

$$\partial^2 z_x = 2\partial\omega_x + x\cdot\partial^2\omega_x, \qquad \partial^2 z_y = x\cdot\partial^2\omega_y.$$

Die Gleichung in ω wird daher

3) $$x\cdot\partial\omega_x - y\cdot\partial\omega_y + x^2\cdot\partial^2\omega_x - y^2\cdot\partial^2\omega_y = 0,$$

und denkt man sich hier φ_ω statt ω gesetzt, also $\partial\varphi_\omega\cdot\partial\omega_x$ statt $\partial\omega_x$, $\partial\varphi_\omega\cdot\partial\omega_y$ statt $\partial\omega_y$, ferner $\partial^2\varphi_\omega\cdot\partial\omega_x^2 + \partial\varphi_\omega\cdot\partial^2\omega_x$ statt $\partial^2\omega_x$, endlich $\partial^2\varphi_\omega\cdot\partial\omega_y^2 + \partial\varphi_\omega\cdot\partial^2\omega_y$ statt $\partial^2\omega_y$; so zerfällt diese Gleichung in

4) $$x\cdot\partial\omega_x - y\cdot\partial\omega_y + x^2\cdot\partial^2\omega_x - y^2\cdot\partial^3\omega_y = 0$$

und 5) $$x^2\cdot\partial\omega_x^2 - y^2\cdot\partial\omega_y^2 = 0.$$

Die letztere Gleichung zerfällt in die beiden

$$x\cdot\partial\omega_x - y\cdot\partial\omega_y = 0 \quad \text{und} \quad x\cdot\partial\omega_x + y\cdot\partial\omega_y = 0,$$

und ihr genügt daher

$$\omega = x\cdot y \quad \text{und} \quad \omega = \frac{y}{x}.$$

Und da diese Werthe von ω auch der Gleichung (4.) genügen, so hat man

6) $z = x\cdot(\psi_{\omega'} + \varphi_\omega)$, wo $\omega' = x\cdot y$, $\omega = \frac{y}{x}$ ist,

als das allgemeine Integral der (1.) gefunden.

Beispiel 2. Aus der Form des allgemeinen Integrals

1) $$z^2 = (x^2 + y^2)\cdot\nu$$

für die Parzialgleichung

2) $$(x^2+y^2)^2\cdot(\partial z_x^2 - \partial z_y^2 + z\cdot(\partial^2 z_x - \partial^2 z_y)) - 4(x^2+y^2)\cdot z\cdot(x\cdot\partial z_x - y\cdot\partial z_y) + 4(x^2-y^2)\cdot z^2 = 0$$

findet man auf demselben Wege zur Bestimmung von ω die Gleichung

3) $$\partial^2\omega - \partial^2\omega_y = 0,$$

welche sich, wenn man φ_ω statt ω, also

$$\partial^2\varphi_\omega\cdot\partial\omega_x^2+\partial\varphi_\omega\cdot\partial^2\omega_x \quad \text{statt} \quad \partial^2\omega_x, \text{ ꝛc.}$$

substituirt, in die beiden Gleichungen

$$4)\quad \partial^2\omega_x-\partial^2\omega_y=0 \quad \text{und} \quad 6)\quad \partial\omega_x^2-\partial\omega_y^2=0.$$

zerlegt. Die letztere giebt

$$\partial\omega_x-\partial\omega_y=0 \quad \text{und} \quad \partial\omega_x+\partial\omega_y=0,$$

also $\omega=x+y$ und $\omega=x-y$;

und da diese Werthe auch der Gleichung (4.) genügen, so ist das allgemeine Integral der (2.) dasmal

$$z=(x^2+y^2)\cdot(\psi_{\omega'}+\varphi_\omega), \text{ wo } \omega'=x+y, \ \omega=x-y \text{ ist.}$$

Beispiel 3. Ist die gegebene Parzialgleichung

$$1)\quad \frac{x+y}{x-y}\cdot z(\partial z_x-\partial z_y)+x\cdot(1-\partial z_x^2-z\cdot\partial^2 z_x)+y\cdot(1-\partial z_y^2-z\cdot\partial^2 z_y)+$$
$$(x+y)(-1+\partial z_x\cdot\partial z_y+z\cdot\partial^{1,1}z_{x,y})=0,$$

und hat man die Form des allgemeinen Integrals

$$2)\quad x^2+y^2+z^2+\nu=0$$

dazu gefunden; so giebt das im Texte beschriebene Verfahren die Gleichung

$$3)\quad x\cdot\partial^2\omega_x+y\cdot\partial^2\omega_y-(x+y)\cdot\partial^{1,1}\omega_{x,y}-\frac{x+y}{x-y}\cdot(\partial\omega_x-\partial\omega_y)=0$$

zur Bestimmung von ω, und zerfällt, wenn man φ_ω statt ω setzt, (weil dann auch noch

$$\partial^2\varphi_\omega\cdot\partial\omega_x\cdot\partial\omega_y+\partial\varphi_\omega\cdot\partial^{1,1}\omega_{x,y} \quad \text{statt} \quad \partial^{1,1}\omega_{x,y}$$

gesetzt werden muß) in dieselbe (3.), aber noch in

$$4)\quad x\cdot\partial\omega_x^2+y\cdot\partial\omega_y^2-(x+y)\cdot\partial\omega_x\cdot\partial\omega_y=0,$$

welche letztere sich auch

$$(\partial\omega_x-\partial\omega_y)\cdot(x\cdot\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_y)=0$$

schreiben läßt: so daß sie sich wiederum in

$$\partial\omega_x-\partial\omega_y=0 \quad \text{und} \quad x\cdot\partial\omega_x-y\cdot\partial\omega_y=0$$

zerlegt, also

$$\omega=x+y \quad \text{und} \quad \omega'=x\cdot y$$

liefert, während diese Werthe auch der Gleichung (3.) genügen.

Also ist das allgemeine Integral der (1.) nämlich

5) $x^2+y^2+z^2+\psi_{\omega'}+\varphi_\omega = 0$, wo $\omega' = xy$, $\omega = x+y$ ist, gefunden.

Beispiel 4. Hat man von der Parzialgleichung

1) $xz(\partial^2 z_x - 2\partial^{1,1} z_{x,y} + \partial^2 z_y) = 2(\partial z_x - \partial z_y)(x(\partial z_x - \partial z_y) - z)$

das allgemeine Integral der Form nach

2) $$z = x \cdot \nu$$

gefunden; so giebt das Verfahren des Textes zur Bestimmung von ω eine Gleichung, welche, wenn man wiederum φ_ω statt ω setzt, in

3) $$\partial^2 \omega_x + \partial^2 \omega_y - 2\partial^{1,1} \omega_{x,y} = 0$$

und

4) $(\partial\omega_x - \partial\omega_y)^2 = 0$ d. h. $\partial\omega_x - \partial\omega_y = 0$ d. h. $\omega = x+y$.

zerfällt. Diesmal werden die beiden Werthe von ω einander gleich; also ist diesmal das allgemeine Integral

$$z = x \cdot (\omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega), \quad \text{wo} \quad \omega = x+y \text{ ist},$$

und es bleibt nun noch übrig ω' dazu zu finden, während dieses ω' eine Funktion von x, y und z seyn kann.

§. 308. Zusatz.

Hat man aber gefunden, daß die zweite Form des allgemeinen Integrals statt finde, nämlich

$$W_{x,y,z,\nu} = 0, \quad \text{wo} \quad \nu = \omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega,$$

und in der Regel ω bereits dazu gefunden worden ist; so findet man nun leicht, dadurch, daß man für diese Form denselben im vorhergehenden (§. 307.) beschriebenen Weg betritt, auch ω' dazu. Man kann dabei $\psi_\omega = 1$ auch $\varphi_\omega = 1$ oder $\varphi_\omega = \omega$, oder ꝛc. wählen. Ja man kann ψ_ω und φ_ω ganz allgemein lassen, und nachher die Endgleichung, wegen der Willkührlichkeit dieser ψ und φ und $\partial\varphi$ und $\partial\psi$ und $\partial^2\varphi$ und $\partial^2\psi$, in mehrere einzelne zerfällen, wodurch sich ω' in einzelnen Fällen noch leichter ergiebt.

Setzt man in dem letzten Beispiel (4.) das vorhergehende (§. 307.)

$$\nu = \omega' + \omega = \omega' + x + y, \text{ oder auch bloß } \nu = \omega' + 1;$$

so hat man als besonderes Integral

1) $$z = x\cdot(\omega'+1) = x\cdot\omega'+x,$$

und daraus die Differenzialgleichungen

2) $$\partial z_x = \omega'+1+x\cdot\partial\omega'_x+x\cdot\partial\omega'_z\cdot\partial z_x,$$

3) $$\partial z_y = x\cdot\partial\omega'_y+x\cdot\partial\omega'_z\cdot\partial z_y,$$

4) $$\partial^2 z_x = 2\partial\omega'_x+2\partial\omega'_z\cdot\partial z_x+x\cdot\partial^2\omega'_x+2x\cdot\partial^{1,1}\omega_{x,z}\cdot\partial z_x+ +x\cdot\partial^2\omega'_z\cdot\partial z_x^2+x\cdot\partial\omega'_z\cdot\partial^2 z_x,$$

5) $$\partial^2 z_y = x\cdot\partial^2\omega'_y+2x\cdot\partial^{1,1}\omega'_{y,z}\cdot\partial z_y+x\cdot\partial^2\omega'_z\cdot\partial z_y^2+x\cdot\partial\omega'_z\cdot\partial^2 z_y,$$

6) $$\partial^{1,1} z_{x,y} = \partial\omega'_y+x\cdot\partial^{1,1}\omega_{x,y}+x\cdot\partial^{1,1}\omega_{y,z}\cdot\partial z_x+\partial\omega'_z\cdot\partial z_y+ x\cdot\partial^{1,1}\omega'_{y,z}\cdot\partial z_y+x\cdot\partial^2\omega'_z\cdot\partial z_x\cdot\partial z_y+x\cdot\partial\omega'_z\cdot\partial^{1,1} z_{x,y}.$$

Eliminirt man zulezt aus der gegebenen Parzialgleichung und aus diesen 6 lezztern Gleichungen die 6 Ausdrücke ω', ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$ und $\partial^2 z_y$, so erhält man zur Bestimmung von ω' eine Gleichung, welcher offenbar durch $\partial\omega'_x = 0$, $\partial\omega'_y = 0$, $\partial^2\omega'_z = 0$ genügt wird, so daß man $\partial\omega'_z = a$ und $\omega' = az+b$ findet. Dann wird das allgemeine Integral folgendes seyn,

$$z = x\cdot((a\cdot z+b)\cdot\psi_\omega+\varphi_\omega) \quad \text{oder} \quad z = x\cdot(z\cdot a\cdot\psi_\omega+(b\cdot\psi_\omega+\varphi_\omega))$$

$$z = x\cdot\ (z\cdot\psi_\omega+\varphi_\omega) \quad \text{oder} \quad z = \frac{x\cdot\varphi_\omega}{1-x\cdot\psi_\omega},$$

wenn ψ_ω und φ_ω ganz willkührliche Funktionen von ω vorstellen, während $\omega = x+y$ bereits gefunden worden ist.

Anmerkung. Wenn übrigens die Gleichung zur Bestimmung von ω', wie auch die zur Bestimmung von ω, immer selber wieder eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung ist, noch dazu eine mit 3 unabhängigen Veränderlichen x, y und z; so kommt es doch allemal nur darauf an, ihr zu genügen (nicht ihr allgemeines Integral zu finden), was meist durch einige Versuche bewerkstelligt werden kann. Auch zerfällt die Gleichung für ω in mehrere, und kann deshalb leichter behandelt werden. Das lezztere gilt aber auch von der Gleichung für ω' im (§. 308.), denn auch sie muß noch identisch werden, wenn man $\omega'\cdot\varphi_\omega$ statt ω' schreibt, während ω selbst schon bekannt ist. Sie muß ferner identisch werden, wenn man $\omega'+\varphi_\omega$ statt ω' sezt; sie muß end-

lich auch noch identisch werden, wenn $\omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega$ statt ω' gesetzt werden sollte, wenn man nur, wie sich von selber versteht, auch in den Ableitungen von ω', statt ω' dasselbe substituirt. Aus diesen Eigenschaften, welche die zur Bestimmung von ω' erhaltene Gleichung hat, kann man in vorkommenden Einzelfällen abermals eine bedeutende Erleichterung der Rechnung erwarten.

§. 309. Zusatz.

Da man in den Anwendungen in der Regel leicht ein besonderes Integral mit einer willkührlichen Konstante ausfindig machen kann; so entsteht hier nun wieder zunächst die Frage, wie man aus einem solchen besondern Integral

1) $$f_{x,y,z,a} = 0,$$

mit der willkührlichen Konstante a, welches einer Parzialgleichung der 2ten Ordnung

2) $$F_{x,y,z,z_{1/1},z_{2/1},z_{1/2}} = 0$$

genügt, zu der Form des allgemeinen Integrals sich erheben könne, um dann nach den vorstehenden (§§.) die ω und ω' dazu finden zu können.

Betrachtungen, ganz analog denen, welche in den (§. 287. III. u. §. 293. III.) angestellt worden sind, führen aber dahin einzusehen, daß man hier aus dem besondern Integral (1.) die Form des allgemeinen Integrals

3) $W_{x,y,z,\nu} = 0$, wo $\left\{\begin{matrix}\text{entweder } \nu = \psi_\omega + \varphi_{\omega'} \\ \text{oder } \nu = \omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega\end{matrix}\right\}$ ist,

nur dadurch erhalten werde, daß man in (1.) statt a eine bestimmte, jedesmal erst auszumittelnde Funktion von ω, ω' und ν, also auch eine bestimmte, jedesmal erst auszumittelnde Funktion von x, y z und ν setzt, welche letztere jedoch x, y, z nicht außerhalb ω und ω' enthält.

Um nun diese Funktion

4) $$a = a_{\omega,\omega',\nu}$$

zu finden, welche in (1.) statt der willkührlichen Konstante a substituirt werden muß, wenn man das allgemeine Integral (3.) erhalten will, denke man sich in (1.) unter a bereits diese gesuchte Funktion $a_{\omega,\omega',\nu}$ vorgestellt, und nehme dann von $f=0$ die 5 Ableitungsgleichungen

$$\partial f_{(x)}=0,\quad \partial f_{(y)}=0,\quad \partial^2 f_{(x)}=0,\quad \partial^{1,1} f_{(x,y)}=0 \text{ und } \partial^2 f_{(y)}=0$$

indem man, weil ν die Summe $\psi_\omega+\varphi_{\omega'}$ vorstellt, statt

$$\partial a_{(x)} \text{ jetzt } (\partial a_\omega+\partial a_\nu\cdot\partial\psi_\omega)(\partial\omega_x+\partial\omega_z\cdot\partial z_x)+$$
$$+(\partial a_{\omega'}+\partial a_\nu\cdot\partial\varphi_{\omega'})(\partial\omega'_x+\partial\omega'_z\cdot\partial z_x),$$

und die diesem entsprechenden Werthe statt $\partial a_{(y)}$, $\partial^2 a_{(x)}$, $\partial^2 a_{(y)}$ und $\partial^{1,1} a_{(x,y)}$ setzt. Dann eliminire man aus diesen letztern 6 Gleichungen und der gegebenen Parzialgleichung $F=0$ die 6 Ausdrücke a, ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^2 z_y$ und $\partial^{1,1} z_{x,y}$; und man wird zu einer Gleichung zwischen den Ableitungen ∂a_ω, $\partial a_{\omega'}$, ∂a_ν, $\partial^2 a_\omega$, $\partial^2 a_{\omega'}$, $\partial^2 a_\nu$, $\partial^{1,1} a_{\omega,\omega'}$, $\partial^{1,1} a_{\omega,\nu}$, $\partial^{1,1} a_{\omega',\nu}$ und den Ableitungen $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$, $\partial\omega_z$, $\partial\omega'_x$, $\partial\omega'_y$, $\partial\omega'_z$ gelangen, welche Gleichung jedoch, wegen der Willkührlichkeit der darin vorkommenden ψ, φ, $\partial\psi_\omega$, $\partial\varphi_{\omega'}$, $\partial^2\psi_\omega$, $\partial^2\varphi_{\omega'}$, $\partial\psi^2_\omega$, $\partial\varphi^2_{\omega'}$, $\partial\psi_{\omega'}$, $\partial\varphi_{\omega'}$ u. s. w. in so viele einzelne Gleichungen zerfallen wird, daß sowohl $\omega_{x,y,z}$ und $\omega'_{x,y,z}$, als auch $a_{\omega,\omega',\nu}$ daraus gefunden werden können; so daß dieser Weg zu gleicher Zeit das Verfahren des (§. 307.) überflüssig macht.

Man muß nur in der Ausführung nicht unterlassen, die ω und ω' zuerst zu bestimmen, aus den gefundenen Gleichungen

$$\omega=\omega_{x,y,z,} \quad \text{und} \quad \omega'=\omega'_{x,y,z,}$$

und aus $f_{x,y,z,a}=0$, sowohl x, y, als auch z in ω, ω' und a auszudrücken, und diese Werthe nachgehends in die übrigen Gleichungen statt x, y und z zu substituiren, weil a, also auch die Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser Funktion $a_{\omega,\omega',\nu}$ dienen sollen, ausser ω, ω' und ν, weder x noch y noch z ausserhalb enthalten dürfen.

Da aber die Rechnungen selbst so ungemein verwickelt werden, so müßte man in einem gegebenen Einzelfalle der Anwen-

dung vorher versuchen, ob nicht ω und ω' bloß x und y und kein z enthalten können. Und in mehreren Einzelfällen wird es auch nicht ohne Nutzen seyn zu versuchen, ob nicht a bloß ω und ν oder bloß ω', ja ob dieses a nicht eine bloße Funktion von ν allein seyn könne.

Hätte endlich (insofern $\omega = \omega'$ gefunden werden sollte) das allgemeine Integral die andere Form, in welcher $\nu = \omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega$ ist; so würde dasselbe Verfahren noch immer statt finden können, nur daß dann die für $\partial a_{(x)}$, $\partial a_{(y)}$, $\partial^2 a_{(x)}$, $\partial^2 a_{(y)}$, $\partial^{1,1} a_{(x,y)}$ zu setzenden Werthe nach dieser neuen Form von ν die nöthige Abänderung erleiden müßten.

Anmerkung. Zur Erleichterung der hier nöthig werdenden Rechnungen, mag noch der Theil, der in allen Fällen derselbe bleibt, hier ein für allemal entwickelt stehen.

I. Ist nämlich

1) $a = a_{\omega,\omega',\nu}$ und $\nu = \psi_\omega + \varphi_{\omega'}$

so hat man

2) $\partial a_{(x)} = (\partial a_\omega + \partial a_\nu \cdot \partial \psi_\omega) \cdot \partial \omega_{(x)} + (\partial a_{\omega'} + \partial a_\nu \cdot \partial \phi_{\omega'}) \cdot \partial \omega'_{(x)}$,

3) $\partial a_{(y)} = (\partial a_{(y)} + \partial a_\nu \cdot \partial \psi_\omega) \cdot \partial \omega_{(y)} + (\partial a_{\omega'} + \partial a_\nu \cdot \partial \phi_{\omega'}) \cdot \partial \omega_{(y)}$,

4) $\partial^2 a_{(x)} = (\partial a_\omega + \partial a_\nu \cdot \partial \phi_\omega) \cdot \partial^2 \omega_{(x)} + (\partial a_{\omega'} + \partial a_\nu \cdot \partial \phi_{\omega'}) \cdot \partial^2 \omega'_{(x)} +$
$+ (\partial^2 a_\omega + 2 \cdot \partial^{1,1} a_{\omega,\nu} \cdot \partial \psi_\omega + \partial^2 a_\nu \cdot \partial \psi_\omega^2 + \partial a_\nu \cdot \partial^2 \psi_\omega) \cdot \partial \omega^2_{(x)} +$
$+ 2 (\partial^{1,1} a_{\omega,\omega'} + \partial^{1,1} a_{\omega,\nu} \cdot \partial \psi_\omega + \partial^{1,1} a_{\omega',\nu} \cdot \partial \phi_{\omega'} + \partial^2 a_\nu \cdot \partial \psi_\omega \cdot \partial \phi_{\omega'}) \partial \omega_{(x)} \cdot \partial \omega'_{(x)} +$
$+ (\partial^2 a_{\omega'} + 2 \partial^{1,1} a_{\omega',\nu} \cdot \partial \phi_{\omega'} + \partial^2 a_\nu \cdot \partial \phi_{\omega'}^2 + \partial a_\nu \cdot \partial^2 \phi_{\omega'}) \cdot \partial \omega'_{(x)}$,

5) $\partial^{1,1} a_{(x,y)} = (\partial a_\omega + \partial a_\nu \cdot \partial \psi_\omega) \cdot \partial^{1,1} \omega_{(x,y)} + (\partial a_{\omega'} + \partial a_\nu \cdot \partial \phi_{\omega'}) \cdot \partial^{1,1} \omega'_{(x,y)} +$
$+ (\partial^2 a_\omega + 2 \partial^{1,1} a_{\omega,\nu} \cdot \partial \psi_\omega + \partial^2 a_\nu \cdot \partial \psi_\omega^2 + \partial a_\nu \cdot \partial^2 \psi_\omega) \cdot \partial \omega_{(x)} \cdot \partial \omega_{(y)} +$
$+ (\partial^{1,1} a_{\omega,\omega'} + \partial^{1,1} a_{\omega,\nu} \cdot \partial \psi_\omega + \partial^{1,1} a_{\omega',\nu} \cdot \partial \phi_{\omega'} + \partial^2 a_\nu \cdot \partial \psi_\omega \cdot \partial \phi_{\omega'}) \cdot (\partial \omega_{(x)} \cdot \partial \omega'_{(y)} + \partial \omega'_{(x)} \cdot \partial \omega_{(y)}) +$
$+ (\partial^2 a_{\omega'} + 2 \partial^{1,1} a_{\omega',\nu} \partial \phi_{\omega'} + \partial^2 a_\nu \cdot \partial \phi_{\omega'}^2 + \partial a_\nu \cdot \partial^2 \phi_{\omega'}) \cdot \partial \omega'_{(x)} \cdot \partial \omega'_{(y)}$,

endlich

6) $\partial^2 a_{(y)} =$ demselben Ausdruck wie in (4.) zur Rechten, nur überall y statt x gesetzt.

II. Ist dagegen

1) $a = a_{\omega,\omega',\nu}$ aber $\nu = \omega' \psi_\omega + \varphi_{\omega'}$

so hat man

2) $\partial a_{(x)} = (\partial a_\omega + \partial a_\nu \cdot (\omega' \cdot \partial \psi_\omega + \partial \phi_\omega)) \partial \omega_{(x)} + (\partial a_{\omega'} + \partial a_\nu \cdot \psi_\omega) \cdot \partial \omega'_{(x)}$,

3) $\partial a_{(y)} = (\partial a_\omega + \partial a_\nu \cdot (\omega' \cdot \partial \psi_\omega + \partial \phi_\omega)) \cdot \partial \omega_{(y)} + (\partial a_{\omega'} + \partial a_\nu \cdot \psi_\omega) \cdot \partial \omega'_{(y)}$,

4) $\partial^2 a_{(x)} = (\partial a_\omega + \partial a_\nu \cdot (\omega' \cdot \partial \psi + \partial \phi)) \cdot \partial^2 \omega_{(x)} + (\partial a_{\omega'} + \partial a_\nu \cdot \psi) \cdot \partial^2 \omega'_{(x)} +$
$+ (\partial^2 a_\omega + 2\partial^{1,1} a_{\omega,\nu} \cdot (\omega' \cdot \partial \psi + \partial \phi) + \partial^2 a_\nu \cdot (\omega' \cdot \partial \psi + \partial \phi)^2 + \partial a_\nu \cdot (\omega' \cdot \partial^2 \psi + \partial^2 \phi)) \partial \omega^2_{(x)} +$
$+ 2(\partial^{1,1} a_{\omega,\omega'} + \partial^{1,1} a_{\omega,\nu} \cdot \psi + \partial^{1,1} a_{\omega',\nu} \cdot (\omega' \cdot \partial \psi + \partial \phi) + \partial^2 a_\nu \cdot \psi (\omega' \cdot \partial \psi + \partial \phi)) \cdot \partial \omega_{(x)} \cdot \partial \omega'_{(x)} +$
$+ (\partial^2 a_{\omega'} + 2\partial^{1,1} a_{\omega',\nu} \cdot \psi + \partial^2 a_\nu \cdot \psi^2) \cdot \partial \omega'^2_{(x)}$, *)

5) $\partial^{1,1} a_{(x,y)} = (\partial a_\omega + \partial a_\nu \cdot (\omega' \cdot \partial \psi + \partial \phi)) \cdot \partial^{1,1} \omega_{(x,y)} + (\partial a_{\omega'} + \partial a_\nu \cdot \psi) \cdot \partial^{1,1} \omega'_{(x,y} +$
$+ (\partial^2 a_\omega + 2\partial^{1,1} a_{\omega,\nu} \cdot (\omega' \partial \psi + \partial \phi) + \partial^2 a_\nu \cdot (\omega' \cdot \partial \psi + \partial \phi)^2 + \partial a_\nu \cdot (\omega' \cdot \partial^2 \psi + \partial^2 \phi)) \cdot \partial \omega_{(x)} \cdot \partial \omega_{(y)} +$
$+ (\partial^{1,1} a_{\omega,\omega'} + \partial^{1,1} a_{\omega,\nu} \cdot \psi + \partial^{1,1} a_{\omega',\nu} \cdot (\omega' \cdot \partial \psi + \partial \phi) + \partial^2 a_\nu \cdot \psi (\omega' \cdot \partial \phi + \partial \psi)) \cdot (\partial \omega_{(x)} \cdot \partial \omega'_{(y)} + \partial \omega'_{(x)} \cdot$
$+ (\partial^2 x_{\omega'} + 2\partial^{1,1} a_{\omega',\nu} \cdot \psi + \partial^2 a_\nu \cdot \psi^2) \cdot \partial \omega'_{(x)} \cdot \partial \omega'_{(y)}$,

endlich

6) $\partial^2 a_{(y)} =$ demselben Ausdruck in (4.) zur Rechten, wenn man daselbst nur überall y statt x setzt.

III. In den Fällen, wo ω und ω' noch z enthalten, ist dabei $\partial \omega_{(x)}$ mit $\partial \omega_x$ nicht zu verwechseln, eben so wenig als $\partial^{1,1} \omega_{(x,y)}$ mit $\partial^{1,1} \omega_{x,y}$ u. s. w.; sondern man hat allemal

1) $\partial \omega_{(x)} = \partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot \partial z_x$, 2) $\partial \omega_{(y)} = \partial \omega_{(y)} + \partial \omega_z \cdot \partial z_y$,

3) $\partial^2 \omega_{(x)} = \partial^2 \omega_x + 2\partial^{1,1} \omega_{x,z} \cdot \partial z_x + \partial^2 \omega_z \cdot \partial z_x^2 + \partial \omega_z \cdot \partial^2 z_x$,

5) $\partial^{1,1} \omega_{(x,y)} = \partial^{1,1} \omega_{x,y} + \partial^{1,1} \omega_{x,z} \cdot \partial z_y + \partial^{1,1} \omega_{y,z} \cdot \partial z_x +$
$+ \partial^2 \omega_z \cdot \partial z_x \cdot \partial z_y + \partial \omega_z \cdot \partial^{1,1} z_{x,y}$,

und

5) $\partial^2 \omega_{(y)} = \partial^2 \omega_y + 2\partial^{1,1}{}_{y,z} \cdot \partial z_y + \partial^2 \omega_z \cdot \partial z_y^2 + \partial \omega_z \cdot \partial^2 z_y$;

während, wenn man überall ω' statt ω setzt, ähnliche 5 Gleichungen für $\partial \omega'_{(x)}$, $\partial \omega'_{(y)}$, $\partial^2 \omega'_{(x)}$, $\partial^{1,1} \omega'_{(x,y)}$ und $\partial^2 \omega'_{(y)}$ hervorgehen.

Uebrigens mag nun diese Methode auf einige Beispiele angewandt werden.

---

*) Des bequemern Schreibens wegen sind die an ψ und φ unten rechts noch anzuhängenden ω hier weggelassen worden, man muß sie überall noch hinzudenken.

Beispiel 1. Es sey die gegebene Parzialgleichung der 2ten Ordnung

1) $$\partial^2 z_x + \partial^2 z_y = 0,$$

von welcher man sogleich eine größere Zahl besonderer Integrale hat, nämlich: $z = a \cdot x$, $z = a \cdot y$, $z = a \cdot x + b \cdot y$ u. s. w. f. Will man nun aus $z = a \cdot x$ das allgemeine Integral ableiten; so setze man

2) $$z = x \cdot a_{\omega, \omega', \nu'}$$

und man hat dann

3) $\partial z_x = a + x \cdot \partial a_{(x)}$, 4) $\partial z_y = x \cdot \partial a_{(y)}$,

5) $\partial^2 z_x = 2 \cdot \partial a_{(x)} + x \cdot \partial^2 a_{(x)}$ und 6) $\partial^2 z_y = x \cdot \partial^2 a_{(y)}$.

Glaubt man nun hoffen zu dürfen, daß ω und ω' kein z mehr enthalten, daß also in $\partial a_{(x)}$, $\partial^2 a_{(x)}$ ꝛc. kein ∂z_x, $\partial^2 z_x$ ꝛc. mehr vorkommt; so erhält man, wenn man aus (1. 5. u. 6.) alle Ableitungen von z eliminirt, die Endgleichung

7) $$2\partial a_{(x)} + x \cdot (\partial^2 a_{(x)} + \partial^2 a_{(y)}) = 0,$$

wo $\partial a_{(x)}$, $\partial^2 a_{(x)}$, $\partial^2 a_{(y)}$, je nachdem man $\nu = \psi_\omega + \varphi_\omega$, oder $\nu = \omega' \cdot \psi + \varphi$ voraussetzen zu dürfen glaubt, die in (Anmerk. I.) oder die (in Anmerk. II.) stehenden Werthe vorstellen, während man, da unserer Annahme zufolge ω, ω' kein z mehr enthalten, bloß $\partial \omega_x$, $\partial \omega_y$ ꝛc. statt $\partial \omega_{(x)}$, $\partial \omega_{(y)}$ ꝛc. schreiben wird.

Setzt man aber in (7.) die Werthe (Anmerk. I.) statt $\partial a_{(x)}$, $\partial^2 a_{(x)}$ und $\partial^2 a_{(y)}$; so erhält man eine Gleichung, welche wegen der Willkührlichkeit der Funktionen φ, ψ, $\partial\varphi$, $\partial\psi$, $\partial\varphi^2$, $\partial\psi^2$, $\partial^2\varphi$, $\partial^2\psi$, $\partial\varphi \cdot \partial\psi$, in 6 folgende Gleichungen zerfällt:

I. $\partial \omega_x^2 + \partial \omega_y^2 = 0$, II. $\partial \omega_x'^2 + \partial \omega_y' = 0$, III. $\partial^2 a_\nu = 0$,

IV. $$2\partial a_\nu \cdot \partial \omega_x + 2x \cdot \partial^{1,1} a_{\omega', \nu} \cdot (\partial \omega_x \cdot \partial \omega_x' + \partial \omega_y \cdot \partial \omega_y') + \\ + \partial a_\nu \cdot (\partial^2 \omega_x + \partial^2 \omega_y) = 0,$$

V. $$2\partial a_\nu \cdot \partial \omega_x' + 2x \cdot \partial^{1,1} a_{\omega, \nu} \cdot (\partial \omega \cdot \partial \omega_x' + \partial \omega_y \cdot \partial \omega_y') + \\ + \partial a_\nu \cdot (\partial^2 \omega_x' + \partial^2 \omega_y') = 0,$$

endlich

VI. $$2(\partial a_\omega \cdot \partial \omega_x + \partial a_{\omega'} \cdot \partial \omega_x') + x \cdot \partial a_\omega \cdot (\partial^2 \omega_x + \partial^2 \omega_y) + \\ + x \cdot \partial a_{\omega'} \cdot (\partial^2 \omega_x' + \partial^2 \omega_y') + 2x \cdot \partial^{1,1} a_{\omega, \omega'} \cdot (\partial \omega_x \cdot \partial \omega_x' + \partial \omega_y \cdot \partial \omega_y') = 0.$$

Aus den Gleichungen (I. u. II.) geht augenblicklich

8) $\omega = x + y \cdot \sqrt{-1}$ und 9) $\omega' = x - y \cdot \sqrt{-1}$

hervor, so wie daraus

10) $$x = \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{2}\omega'.$$

Aus der (III.) folgt

11) $\partial a_\nu = P_{\omega,\omega'}$ und 12) $a = P_{\omega,\omega'}\cdot\nu + Q_{\omega,\omega'}$,

wo P und Q zwei nach ν konstante Ausdrücke sind, welche noch als Funktionen von ω und ω' näher bestimmt werden müssen. Setzt man aber diese Werthe aus (8.—12) in die (IV. u. V.), so erhält man

13) $P + (\omega+\omega')\cdot\partial P_{\omega'} = 0$ und 14) $P + (\omega+\omega')\cdot\partial P_{\omega} = 0$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{\omega+\omega'} + \frac{\partial P_{\omega'}}{P} = 0,$$

oder wenn man links und rechts das Integral nach ω' nimmt,

$$log.(\omega+\omega') + log.P = \text{Const.} = log.\, R_\omega,$$

wenn man die Konstante, weil sie noch eine Funktion von ω seyn kann, durch $log.\, R_\omega$ bezeichnet, d. h.

15) $$P = \frac{R_\omega}{\omega+\omega'}.$$

Setzt man aber diesen Werth von P in (14.), so ergiebt sich zur Bestimmung von R

16) $$\partial R_\omega = 0,$$

also R auch nach ω konstant. Die Gleichung (12.) wird daher jetzt

17) $$a = \frac{R\cdot\nu}{\omega+\omega'} + Q_{\omega,\omega'}$$

wo R nach ν, nach ω und nach ω' konstant ist, während $Q_{\omega,\omega'}$ noch der Gleichung (VI.) gemäß genommen werden muß. Substituirt man aber den Werth aus (17.) statt a; so erhält man zur Bestimmung von Q die Gleichung

18) $$\partial Q_\omega + \partial Q_{\omega'} + 2\partial^{1,1} Q_{\omega,\omega'} = 0,$$

welcher durch

19) $$Q = 0$$

genügt wird *).

Die Gleichung (2.) geht daher über in

---

*) Auch $Q = b\omega - b\omega'$ genügt dieser Gleichung (19.). Auch giebt es ein allgemeines Integral derselben, welches hier aber nicht gesucht wird.

20) $z = x \cdot \frac{R\nu}{\omega + \omega'}$, d. h. $z = \frac{1}{2}R \cdot \nu$, wo $\nu = \psi_\omega + \varphi_\omega$, ist,

und dies ist also das gesuchte allgemeine Integral.

Da man statt ψ_ω und $\varphi_{\omega'}$, dem (§. 306. II.) zufolge, auch beziehlich $\frac{2\psi_\omega}{R}$ und $\frac{2\varphi_{\omega'}}{R}$ schreiben kann, weil R nach ω und ω', also auch nach x und y konstant ist, so kann das allgemeine Integral (20.) auch bloß so

21) $z = \nu$ oder $z = \psi_\omega + \varphi_{\omega'} = \psi_{x+y\sqrt{-1}} + \varphi_{x-y\sqrt{-1}}$

geschrieben werden. *)

Da wir übrigens hier angenommen haben, daß ω und ω' kein z enthalten, so könnte, wenn diese Voraussetzung nicht statt findet, die ganze Rechnung vergebens angestellt seyn. In diesem Falle müßte man sie noch einmal beginnen, aber nun ω und ω' als Funktionen von x, y und auch noch z behandeln. Und wäre die Voraussetzung, daß $\nu = \varphi_{\omega'} + \psi_{\omega'}$ sey, nicht statthaft; so müßte man ebenfalls die Rechnung noch einmal beginnen, aber nun $\nu = \omega' \cdot \varphi_\omega + \psi_\omega$ voraussetzen.

Uebrigens war dieses Integral früher schon bekannt, daher wir unsere Methode noch auf ein anderes Beispiel anwenden wollen.

Beispiel 2. Von der Parzialgleichung der 2ten Ordnung

1) $y^2 \cdot (\partial^2 z_y - \partial^2 z_x) - 2y \cdot \partial z_y + 2z = 0$

hat man bald das besondere Integral

2) $z = a \cdot xy$

aufgefunden. Nimmt man nun zum allgemeinen Integral desselben,

3) $z = xy \cdot a_{\omega,\omega',\nu'}$

und setzt man wieder voraus, daß ω und ω' kein z enthalten werde, um, wenn solches nicht nöthig seyn sollte, diese ungeheuren Rechnungen zu vermeiden; so erhält man aus (3.) sogleich

4) $\partial z_x = y \cdot a + xy \cdot \partial a_{(x)}$, 5) $\partial z_y = x \cdot a + xy \cdot \partial a_{(y)}$,

---

*) Da von der gegebenen Parzialgleichung $\partial^2 z_x + \partial^2 z_y = 0$ auch $z = a$ ein besonderes Integral ist; so hätte man von diesem ω ausgehen, d. h. $z = a_{\omega,\omega',\nu}$ als das allgemeine Integral annehmen, und nun $a_{\omega,\omega',\nu}$ so wie ω und ω' selbst nach unserer Methode dazu suchen können. Dann wurde die Rechnung kürzer.

6) $\partial^2 z_x = 2y \cdot \partial a_{(x)} + xy \cdot \partial^2 a_{(x)}$, 7) $\partial^2 z_y = 2x \cdot \partial a_{(y)} + xy \cdot \partial^2 a_{(y)}$.

Eliminirt man nun aus (1. 3 5. 6 u. 7.) die ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^2 z_y$ und a, so erhält man

8) $$2\partial a_{(x)} + x \cdot (\partial^2 a_{(x)} - \partial^2 a_{(y)}) = 0.$$

Setzt man hier nun, indem man $\nu = \psi_\omega + \varphi_\omega$, voraussetzt, die Werthe aus (Anmerk. I.); so erhält man wiederum 6 Gleichungen, nämlich

I. $\partial \omega_x^2 - \partial \omega_y^2 = 0$, II. $\partial \omega_x'^2 - \partial \omega_y'^2 = 0$, III. $\partial^2 a_\nu = 0$,

IV. $$2\partial a_\nu \cdot \partial \omega_x + 2x \cdot \partial^{1,1} a_{\omega',\nu} \cdot (\partial \omega_x \cdot \partial \omega_x' - \partial \omega_y \cdot \partial \omega_y') + \\ + \partial a_\nu \cdot (\partial^2 \omega_x - \partial^2 \omega_y) = 0,$$

V. $$2\partial a_\nu \cdot \partial \omega_x' + 2x \cdot \partial^{1,1} a_{\omega,\nu} \cdot (\partial \omega_x' \cdot \partial \omega_x + \partial \omega_y' \cdot \partial \omega_y) + \\ + \partial a_\nu \cdot (\partial^2 \omega_x' - \partial \omega_y') = 0,$$

VI. $$2(\partial a_\omega \cdot \partial \omega_x + \partial a_{\omega'} \cdot \partial \omega_x') + x \cdot \partial a_\omega \cdot (\partial^2 \omega_x - \partial^2 \omega_y) + \\ + x \cdot \partial a_{\omega'} (\partial^2 \omega_x' - \partial^2 \omega_y') + 2x \partial^{1,1} a_{\omega,\omega'} \cdot (\partial \omega_x \cdot \partial \omega_x' - \partial \omega_y \cdot \partial \omega_y') = 0.$$

Aus den Gleichungen (I. u. II.) folgt

9) $\omega = x + y$, 10) $\omega' = x - y$,

und daraus

11) $x = \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega'$.

Aus der Gleichung (III.) geht hervor

12) $\partial a_\nu = P_{\omega,\omega'}$, 13) $a = P_{\omega,\omega'} \cdot \nu + Q_{\omega,\omega'}$.

Diese Werthe in (IV. u. V.) substituirt, geben

15) $P + (\omega + \omega') \cdot \partial P_{\omega'} = 0$, 16) $P + (\omega + \omega') \cdot \partial P_\omega = 0$,

also

17) $P = \frac{R}{\omega + \omega'}$, wo R weder ω noch ω' enthält.

Die Gleichung (VI.) giebt endlich $Q = 0$, also daß

18) $a = \frac{R\nu}{\omega + \omega'}$ ist.

Demnach ist das gesuchte allgemeine Integral (3.) jetzt

19) $z = \frac{1}{2}Ry \cdot \nu$ oder $z = y \cdot (\psi_\omega + \varphi_{\omega'})$,

wo $\omega = x + y$ und $\omega' = x - y$ ist.

Anmerkung 2. Ein allgemeines Integral $W = 0$ einer Parzialgleichung $F = 0$ der 2ten Ordnung kann (in endlicher

Form hergestellt) außer $\nu = \psi_\omega + \varphi_{\omega'}$ (oder $\nu = \omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega$) auch noch die Ableitungen $\partial\psi_{\omega'}$, $\partial\varphi_{\omega'}$ (oder $\partial\varphi_\omega$) in sich aufnehmen. Denkt man sich nämlich ein solches $W = 0$ zwischen x, y z, ν und $\partial\psi_{\omega'}$, $\partial\varphi_{\omega'}$, wo man $\nu = \psi_\omega + \varphi_{\omega'}$ voraussetzt; so enthalten die Ableitungsgleichungen $\partial W_{(x)} = 0$ und $\partial W_{(y)} = 0$ bereits $\partial^2\psi_\omega$ und $\partial^2\varphi_{\omega'}$, während die 3 nächsten Ableitungsgleichungen $\partial^2 W_{(x)} = 0$, $\partial^{1,1} W_{(x,y)} = 0$ und $\partial^2 W_{(y)} = 0$ schon $\partial^3\psi_{\omega'}$, $\partial^3\varphi_{\omega'}$ enthalten werden. Eliminirt man aber nachgehends aus allen 6 Gleichungen 5 von den Ausdrücken ν, $\partial\psi_{\omega'}$, $\partial\varphi_{\omega'}$, $\partial^2\psi_{\omega'}$, $\partial^2\varphi_{\omega'}$, $\partial^3\psi_{\omega'}$, $\partial^3\varphi_{\omega'}$; so können die beiden übrigen von selber herausfallen, wie folgendes Beispiel insbesondere zeigt.

Hat man z. B. die Gleichung

1) $z = \psi_\omega + \varphi_{\omega'} - x \cdot (\partial\psi_\omega - \partial\varphi_{\omega'})$, wo $\omega = y + x$, $\omega' = y - x$ seyn soll,

so erhält man daraus, wenn man sie nach x und nach y differenzirt:

2) $\partial z_x = -x \cdot (\partial^2\psi_\omega + \partial^2\varphi_{\omega'})$,

3) $\partial z_y = \partial\psi_\omega + \partial\varphi_{\omega'} - x \cdot (\partial^2\psi_\omega - \partial^2\varphi_{\omega'})$,

4) $\partial^2 z_x = -(\partial^2\psi_\omega + \partial^2\varphi_{\omega'}) - x \cdot (\partial^3\psi_\omega - \partial^3\varphi_{\omega'})$,

5) $\partial^2 z_y = \partial^2\psi_\omega + \partial^2\varphi_{\omega'} - x \cdot (\partial^3\psi_\omega - \partial^3\varphi_{\omega'})$.

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (2. 4. und 5.) die Ausdrücke $\partial^2\psi_{\omega'}$, $\partial^3\psi_\omega$; so fallen $\partial^2\varphi_{\omega'}$, $\partial^3\varphi_{\omega'}$ von selber weg, und man erhält die Parzialgleichuug

$$\partial^2 z_x - \partial^2 z_y - \frac{2}{x} \cdot \partial z_x = 0,$$

von welcher die Gleichung (1.) das allgemeine Integral ist.

Allein diese Gleichung (1.) nimmt, eben weil $\omega = y + x$ und $\omega' = y - x$ ist, auch sogleich die Form

$$z = \nu - x \cdot \partial\nu_{(x)}, \quad \text{wo} \quad \nu = \psi_\omega + \varphi_{\omega'}, \quad \text{ist},$$

an, enthält also, genau angesehen, doch ausser x, y, z nur noch den Buchstaben ν, während $\nu = \psi_\omega + \varphi_{\omega'}$ ist. Ganz dem (§. 304.) angemessen.

In keinem Falle aber kann ein allgemeines Integral einer Parzialgleichung der 2ten Ordnung mehr als 2 willkührliche Funktionen in sich aufnehmen, weil solches gegen das bei der In-

tegration des (§§. 302. 303.) gefundene Resultat verstoßen würde. Wenn man daher das in dem (§. 309.) gelehrte Verfahren, zum endlichen allgemeinen Integral zu gelangen, vergebens angewandt hat; so kann man noch vermuthen, daß vielleicht dieses Integral auch Ableitungen der willkührlichen Funktionen, oder vielmehr Ableitungen von ν, in sich aufnehmen werde, und man kann nun noch eine Methode aufsuchen, nach welcher in diesem Falle zu verfahren wäre, um zu dem Integral selbst in endlicher Form zu gelangen.

Wir verfolgen jedoch diese Betrachtung der Ausnahmsfälle nicht weiter, da, wie in den später folgenden Theilen dieses Systems gezeigt werden wird, für die Anwendungen, die Integration durch unendliche Reihen immer die beste ist, sobald man nur für jeden besondern Fall der Anwendung die, diesem Falle am meisten entsprechende Form dieser Reihen hervorzuheben versteht.

Anmerkung 3. Man kann auch $a = a_{x,y,z,\nu}$ so suchen, daß das besondere Integral

$$1) \qquad f_{x,y,z,a} = 0$$

von $$2) \qquad F = 0$$

dadurch in das allgemeine Integral

$$3) \qquad W_{x,y,z,\nu} = 0$$

übergehe. Weil aber das allgemeine Integral (3.) auch der Partial-Differenzialgleichung $F = 0$ genügt, auch wenn statt ν irgend eine Konstante (nach x und y und z) gesetzt wird; so findet man die Gleichung zur Bestimmung dieser für a zu setzenden bestimmten Funktion

$$4) \qquad a = a_{x,y,z,\nu},$$

wenn man von der (1.) die 5 Ableitungsgleichungen $\partial f_{(x)} = 0$, $\partial f_{(y)} = 0$, $\partial^2 f_{(x)} = 0$, $\partial^{1,1} f_{(x,y)} = 0$, $\partial^2 f_{(y)} = 0$ nimmt, dabei a als die Funktion $a_{x,y,z,\nu}$ behandelt, und y als konstant ansieht, und dann aus diesen 5 Gleichungen, in Verbindung mit der (1.) und der (2.), die 6 Unbekannten z, ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$ eliminirt.

Da jedoch diese dadurch entstehende Gleichung zur Bestimmung von $a_{x,y,z,\nu}$, welche wir durch

$$5) \qquad A = 0$$

vorstellen wollen, selber wieder eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung, noch überdies mit drei unabhängigen Veränderlichen wird; und da ferner diese Funktion $a_{x,y,z,\nu}$ eine völlig bestimmte Funktion ist, so daß nicht jede beliebige genommen werden darf, welche der Gleichung (5.) genügt (sondern im Gegentheil, unter allen Funktionen a, die der (5.) genügen, diese bestimmte, den hier vorliegenden Bedingungen besonders entsprechende noch herausgesucht werden muß): so ist das hier eben beschriebene Verfahren nur in denjenigen Einzelfällen mit einigem Erfolge anzuwenden, in denen man Ursache hat zu vermuthen, daß a bloß x oder y oder z allein enthalte, wo dann die Gleichung (5.) keine Parzial-Differenzialgleichung, sondern nur eine Differenzialgleichung mit einem einzigen unabhängigen Veränderlichen wird, daher eher allgemein integrirt werden kann.

Beispiel 1. Ist z. B. gegeben die Parzialgleichung

$$1) \qquad y^2\cdot(\partial^2 z_y - \partial^2 z_x) - 2y\cdot\partial z_y + 2z = 0,$$

und hat man für sie das besondere Integral

$$2) \qquad z = a\cdot xy$$

gefunden; so erhält man, wenn man voraussetzt, daß a bloß x in sich aufgenommen haben werde,

$$3) \qquad z = xy\cdot a_{x,\nu}$$

als die Form des allgemeinen Integrals, wo aber $a_{x,\nu}$ noch gesucht wird. Sieht man nun ν als konstant an, so findet man aus (3.) die Differenzialgleichungen

$$4) \quad \partial z_x = y\cdot a + xy\cdot\partial a_x, \qquad 5) \quad \partial z_y = x\cdot a,$$

$$6) \quad \partial^2 z_x = 2y\cdot\partial a_x + xy\cdot\partial^2 a_x, \qquad 7) \quad \partial^2 z_y = 0.$$

Und wenn man nun aus (1. 2. 4.—7.) sowohl z als auch dessen Ableitungen eliminirt; so erhält man die Gleichung in a

$$8) \qquad 2\cdot\partial a_x + x\cdot\partial^2 a_x = 0,$$

welche, nach Anleitung des (Kap. XII.) integrirt,

9) $$a = \frac{c}{x} + b$$

giebt. Für eine dieser Konstanten c oder b muß man nun ν setzen, während die andere einen Ziffernwerth erhalten muß. Die nähere Prüfung zeigt nun $b = 0$, $c = \nu$, also $a = \frac{\nu}{x}$, und die Gleichung (3.) geht daher über in

11) $$z = y \cdot \nu, \text{ wo } \left\{\begin{matrix}\text{entweder } \nu = \psi_\omega + \varphi_{\omega'} \\ \text{oder } \nu = \omega' \cdot \psi_\omega + \varphi_\omega\end{matrix}\right\} \text{ ist.}$$

Man hat nun das allgemeine Integral der Form nach, und kann dazu nach (§. 307.)

$$\omega = x + y \quad \text{und} \quad \omega' = x - y$$

finden, so daß also

11) $$\nu = \psi_\omega + \varphi_{\omega'}$$

genommen werden muß.

Beispiel 2. Wäre gegeben die Parzialgleichung

I) $$\partial^2 z_x + \partial^2 z_y = 0,$$

so fände sich gar bald das allgemeine Integral

$$z = ax \quad \text{oder} \quad z = ay.$$

Setzt man nun, um von

2) $$z = ay$$

zu dem allgemeinen Integral zu gelangen, voraus, daß statt a bloß eine Funktion von y und ν gesetzt werden kann; so erhält man aus

3) $$z = y \cdot a_{y,\nu}$$

sogleich

4) $\partial z_x = 0,$ 5) $\partial^2 z_x = 0,$

6) $\partial z_y = y \cdot \partial a_y + a,$ 7) $\partial^2 z_y = y \cdot \partial^2 a_y + 2 \cdot \partial a_y.$

Diese Werthe in die (1.) substituirt, geben

8) $$y \cdot \partial^2 a_y + 2 \partial a_y = 0$$

oder

$$\frac{\partial(\partial a_y)_y}{\partial a_y} + \frac{2}{y} = 0,$$

oder, wenn man links und rechts die Integrale nimmt,

9) $$log.\,\partial a_y + 2\,log.\,y = log.\,c,$$

d. h. $$\partial a_y = \frac{c}{y^2}$$

d. h. 10) $$a_y = -\frac{c}{y} = \frac{\nu}{y},$$

wenn man ν statt $-c$ setzt. Dies giebt als Form des allgemeinen Integrals

11) $$z = \nu, \quad \text{wo } \nu = \varphi_{\omega'} + \psi_{\omega} \text{ ist.}$$

Verfährt man nun nach (§. 307.) um ω und ω' dazu zu finden, so ergiebt sich aus $z = \varphi_\omega$

$$\partial z = \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_{(x)}, \qquad \partial z_y = \partial\varphi_\omega \cdot \partial\omega_{(y)},$$

$$\partial^2 z_x = \partial^2\varphi_\omega \cdot \partial\omega^2_{(x)} + \partial\varphi_\omega \cdot \partial^2\omega_{(x)},$$

$$\partial^2 z_y = \partial^2\varphi_\omega \cdot \partial\omega^2_{(x)} + \partial\varphi_\omega \cdot \partial^2\omega_{(y)}.$$

Nach der vorgeschriebenen Elimination finden sich dann, wegen der Willkührlichkeit von $\partial\varphi_\omega$ und $\partial^2\varphi_\omega$, die Gleichungen

$$\partial\omega^2_{(x)} + \partial\omega^2_{(y)} = 0; \qquad \partial^2\omega_{(x)} + \partial^2\omega_{(y)} = 0.$$

Aus der erstern Gleichung ergiebt sich $\partial\omega_{(x)} = \mp\partial\omega_{(y)} \cdot \sqrt{-1}$, welcher genügt wird, wenn man $\partial\omega_{(x)} = \pm\partial\omega_{(y)} = \sqrt{-1}$ nimmt, so daß sich

$$\omega = x \pm y \cdot \sqrt{-1}$$

findet. Man wird daher

$$\omega = x + y \cdot \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \omega' = x - y \cdot \sqrt{-1}$$

nehmen, und

$$z = \varphi_\omega + \psi_{\omega'}$$

ist dann das allgemeine Integral der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung

$$\partial^2 z + \partial^2 z_y = 0,$$

wie wir solches oben schon einmal gefunden haben.

§. 310. Zusatz.

Hat ein besonderes Integral mehr als eine willkührliche (der Parzialgleichung $F = 0$ fremde) Konstante; so erhält man auch die Form des allgemeinen Integrals, wenn man statt jeder dieser willkührlichen Konstante a, b, c ꝛc., bestimmte, jedesmal auszumittelnde Funktionen von ω, ω' und ν setzt, wo ν die Summe

$\psi_{\omega'}+\varphi_{\omega}$ oder $\omega'\cdot\psi_{\omega}+\varphi_{\omega}$ bedeutet, während ψ und φ willkührliche Funktionen vorstellen. — Ja man kann sogar für jede dieser Konstanten a, b, c, ꝛc. bis auf eine einzige, ganz beliebige Funktionen von ω, ω' und ν setzen, wenn man nur dann statt der einzigen noch übrigen willkührlichen Konstante eine bestimmte, jedesmal noch auszumittelnde Funktion von ω, ω' und ν schreibt.

Auch kann man zuerst statt b, c, ꝛc. Funktionen von a setzen, statt a dagegen eine Funktion von ω, ω' und ν, oder statt c, ꝛc. Funktionen von ω, ω' und ν, u. s. w. f., und diese Funktionen können jedesmal alle bis auf eine einzige beliebig gewählt werden, wenn nur diese einzige zuletzt für jeden Fall gehörig ausgemittelt und bestimmt wird.

§. 311. Zusatz.

Hat man ein besonderes Integral

$$1) \qquad f_{x,y,z,a,b,c,g,h} = 0$$

der gegebenen Parzialgleichung der 2ten Ordnung

$$2) \qquad F_{x,y,z,z_{1,1}z,z_{2,1}z_{1,2}z} = 0$$

mit 5 willkührlichen Konstanten a, b, c, g und h; so muß, wenn man aus $f=0$ und dessen 5 Ableitungen

$$\partial f_{(x)}=0, \quad \partial f_{(y)}=0, \quad \partial^2 f_{(x)}=0, \quad \partial^{1,1} f_{(x,y)}=0, \quad \partial^2 f_{(y)}=0,$$

die 5 Konstanten a, b, c, g und h eliminirt, jedesmal $F=0$ wiederum hervorgehen.

Man könnte daher, um zur Bestimmung des allgemeinen Integrals zu gelangen, hier wiederum, wie bei den Parzialgleichungen der ersten Ordnung im (§. 288.) unter a, b, c, g, h solche Funktionen von ω, ω' und ν sich denken, für welche die Ableitungen

$$\partial f_{(x)}=0, \quad \partial f_{(y)}=0, \quad \partial^2 f_{(x)}=0, \quad \partial^{1,1} f_{(x,y)}=0, \quad \partial^2 f_{(y)}=0$$

der Form nach genau dieselben werden, wie wenn a, b, c, g, h konstant sind. — In der Ausführung dieses Vorhabens begegnet man aber Schwierigkeiten, welche bald in die Augen fallen, und deren nähere Besprechung hier an der unrechten Stelle seyn würde.

§. 312. Zusatz.

Auch die singulären Werthe, welche der Parzialgleichung der 2ten Ordnung

$$F_{x,y,z,z_{1,1}z,z_{2,1}z_{1,2}z} = 0$$

zukommen, und welche, wenn sie existiren, aus der Parzialgleichung $F = 0$ selbst direkt und namentlich dadurch gefunden werden können, daß man die für $\partial^2 z_x$, $\partial^3 z_x$, $\partial^4 z_x$, ꝛc. (aus $F = 0$ und deren Ableitungsgleichungen) nach (§. 303.) gefundenen Ausdrücke $= \frac{0}{0}$ setzt, — auch diese singulären Werthe kann man nun direkt aus dem allgemeinen oder aus einem der besondern Integrale, auf den (§§. 289. 295.) betretenen Wegen, abzuleiten suchen.

Aber auch hier müssen wir uns damit begnügen, das, was man noch versuchen kann, anzudeuten, und bei Gelegenheit der Behandlung der Parzialgleichungen der ersten Ordnung die Art der Durchführung nachgewiesen, so wie die neuen Gesichtspunkte eröffnet zu haben, von welchen aus diese Untersuchungen angesehen werden können, und welche dem Monographen über die Lehre der Parzialgleichungen ein weites und fruchtbares Feld der Bearbeitung eröffnen. Das Lehrbuch darf hier nicht zu weitläufig werden.

§. 313. Aufgabe.

Eine Parzialgleichung der zweiten Ordnung $F = 0$ mit 3 unabhängigen Veränderlichen x, y, z, (welche also außer x, y, z, u, ∂u_x, ∂u_y, ∂u_z, auch noch $\partial^2 u_x$, $\partial^2 u_y$, $\partial^2 u_z$, $\partial^{1,1} u_{x,y}$, $\partial^{1,1} u_{x,z}$, $\partial^{1,1} u_{y,z}$ enthalten kann) allgemein zu integriren.

Auflösung. Will man abermals eine nach Potenzen von $x - \alpha$ fortlaufende unendliche Reihe haben, welche alle für u existirende Funktionen von x, y, z (mit Ausnahme der etwaigen singulären Werthe) in sich schließt; so darf man nur wieder diese Reihe mit den unbestimmten Koeffizienten $\delta^0 u$, δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, ꝛc. statt u setzen, und die Rechnung nach Anleitung des 11ten Kapitels genau so durchführen, wie solches für die analo-

gen Aufgaben der (§§. 265. 271. 276. 283. 290. und 302.) bereits durchgeführt worden ist.

Die einzelnen Koeffizienten dieser für u so gefundenen, nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufenden Reihen nehmen dann zwei willkührliche Funktionen X_0 und X_1 auf, welche kein x, sondern y und z enthalten, und deren Ableitungen nach y und nach z ebenfalls vorkommen werden.

Daß man auf diesem Wege eben so gut Reihen erhalten könne für den allgemeinen Werth von u, welche nach Potenzen von $y-\beta$ oder nach Potenzen von $z-\gamma$ fortlaufen, fällt dabei von selbst in die Augen; eben so, daß man dann auch leicht für u Doppelreihen, ja dreifache Reihe erhalten könne.

§. 314. Zusatz.

Giebt es aber ein allgemeines Integral dieser Parzialgleichung $F=0$ in endlicher Form; so hat solches die Form

$$f_{x,y,z,\nu}=0, \quad \text{wo} \begin{cases} \text{entweder} & \nu=\psi_{\omega,\omega'}+\varphi_{\omega,\omega''} \\ \text{oder} & \nu=\omega''\cdot\psi_{\omega,\omega'}+\varphi_{\omega,\omega'} \end{cases},$$

wo ψ und φ ganz willkührliche Funktionen, wo dagegen ω, ω' und ω'' bestimmte Funktionen von x, y und z sind (welche auch u in sich aufgenommen haben können).

In der That, wenn man aus $f=0$ die 3 Ableitungsgleichungen $\partial f_{(x)}=0$, $\partial f_{(y)}=0$, $\partial f_{(z)}=0$ der ersten Ordnung, und die 6 Ableitungsgleichungen der 2ten Ordnung, nämlich $\partial^2 f_{(x)}=0$, $\partial^2 f_{(y)}=0$, $\partial^2 f_{(z)}=0$, $\partial^{1,1} f_{(x,y)}=0$, $\partial^{1,1} f_{(x,z)}=0$, $\partial^{1,1} f_{(y,z)}=0$ nimmt; so wird man 10 Gleichungen haben, aus welchen die 9 willkührlichen Ausdrücke, welche darin vorkommen, nämlich, wenn $\nu=\psi_{\omega,\omega'}+\varphi_{\omega,\omega''}$ ist, die 9 Ausdrücke $\psi+\varphi$, $\partial\psi_{\omega}+\partial\varphi_{\omega'}$, $\partial\psi_{\omega''}$, $\partial\varphi_{\omega'''}$, $\partial^2\psi_{\omega}+\partial^2\varphi_{\omega'}$, $\partial^2\psi_{\omega''}$, $\partial^2\varphi_{\omega'''}$, $\partial^{1,1}\psi_{\omega,\omega''}$, $\partial^{1,1}\varphi_{\omega,\omega''}$; oder, wenn $\nu=\omega''\cdot\psi_{\omega,\omega'}+\varphi_{\omega,\omega'}$ ist, diese 9 anderen Ausdrücke $\omega''\cdot\psi+\varphi$, $\omega''\cdot\partial\psi_{\omega}+\partial\varphi_{\omega'}$, $\omega''\cdot\partial\psi_{\omega'}+\partial\varphi_{\omega'}$, $\omega''\cdot\partial^2\psi_{\omega}+\partial^2\varphi_{\omega}$, $\omega''\cdot\partial^2\psi_{\omega'}+\partial^2\varphi_{\omega'}$, $\omega''\cdot\partial^{1,1}\psi_{\omega,\omega'}+\partial^{1,1}\varphi_{\omega,\omega'}$,

ψ, $\partial\psi_\omega$, $\partial\psi_{\omega'}$ gerade eliminirt werden können; so daß man zur gegebenen Parzialgleichung $F=0$ wiederum gelangen wird, weil diese Eliminationsgleichung von den willkührlichen Funktionen ψ und φ keine Spur mehr haben kann.

§. 315. Zusatz.

Hat man aber für diese Parzialgleichung $F=0$ die Form

$$f_{x,y,z,u,v}=0, \quad \text{wo} \begin{cases} \text{entweder} & v=\psi_{\omega,\omega'}+\varphi_{\omega,\omega''} \\ \text{oder} & v=\omega''\cdot\psi_{\omega,\omega'}+\varphi_{\omega,\omega'} \end{cases}$$

des allgemeinen Integrals bereits gefunden; so werden Mittel, welche denen in den (§§. 287. 293. 307.) ganz analog sind, ohne besondere Schwierigkeiten ω, ω' und ω'' dazu zu finden lehren, während, wenn $v=\psi_{\omega,\omega'}+\varphi_{\omega,\omega''}$ vorausgesetzt, aber dann $\omega'=\omega''$ gefunden werden sollte, dies gerade anzeigt, daß nun v die andere Form $\omega''\cdot\psi_{\omega,\omega'}+\varphi_{\omega,\omega'}$ haben werde, so daß dann, ähnlich wie im (§. 308.), noch $\omega''_{x,y,z,u}$ dazu gefunden werden muß.

§. 316. Zusatz.

Schwieriger jedoch ist es, aus einem besonderen Integral mit einer oder mit mehreren willkührlichen Konstanten a, b, c, ꝛc. die Form

$$f_{x,y,z,v}=0$$

des allgemeinen Integrals zu erhalten, obgleich man behaupten kann, daß letztere jedesmal hervorgeht, wenn man statt der Konstanten a, b, c, ꝛc. jetzt Funktionen von $\omega, \omega', \omega''$ und v schreibt. (Vgl. §. 309. und die folgenden).

§. 317. Zusatz.

Die singulären Werthe von $F=0$ erhält man hier wie in den frühern Fällen direkt aus den im (§. 313.) für $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, ꝛc. gefundenen Ausdrücken, indem man solche $=\frac{0}{0}$ setzt. Auch kann man versuchen, sie noch direkt aus dem allgemeinen oder

aus besonderen Integralen zu erhalten, indem man Wege betritt, welche den von uns für die einfachern Fälle betretenen analog sind.

§. 318. Aufgabe und Auflösung.

Wäre aber eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung mit 4 unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t zur Bestimmung einer Funktion u gegeben; so würde erstlich das allgemeine Integral in Form einer, nach Potenzen von $x-\alpha$ oder $y-\beta$ oder $z-\gamma$ oder $t-\delta$ fortlaufenden unendlichen Reihe augenblicklich erhalten werden können, während die Koeffizienten einer solchen, z. B. nach $x-\alpha$ fortlaufenden Reihe zwei willkührliche Funktionen der 3 übrigen unabhängigen Veränderlichen y, z, t und Ableitungen derselben nach y, nach z und nach t in sich aufnehmen werden.

Existirt aber ein allgemeines Integral in endlicher Form; so muß solche folgende seyn:

$$f_{x,y,z,t,u,v} = 0, \quad \text{wo} \begin{cases} \text{entweder} & v = \psi_{\omega,\omega',\omega''} + \varphi_{\omega,\omega',\omega'''} \\ \text{oder} & v = \omega''' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega''} + \varphi_{\omega,\omega,'\omega''} \end{cases} \text{ist,}$$

wo $\omega, \omega', \omega''$ und ω''' bestimmte Funktionen von x, y, z, t sind, wo dagegen ψ und φ ganz willkührliche Funktionen vorstellen. — In der That liefert diese Gleichung 4 Ableitungsgleichungen der 1sten und 10 Ableitungsgleichungen der 2ten Ordnung, so daß aus allen 15 Gleichungen, im Falle $v = \psi + \varphi$ seyn sollte, die 14 willkührlichen $\psi+\varphi$, $\partial\psi_\omega + \partial\varphi_\omega$, $\partial\psi_{\omega'} + \partial\varphi_{\omega'}$, $\partial\psi_{\omega''}$, $\partial\varphi_{\omega'''}$, $\partial^2\psi_\omega + \partial^2\varphi_\omega$, $\partial^2\psi_{\omega'} + \partial^2\varphi_{\omega'}$, $\partial^2\psi_{\omega''}$, $\partial^2\varphi_{\omega'''}$, $\partial^{1,1}\psi_{\omega,\omega'} + \partial^{1,1}\varphi_{\omega,\omega'}$, $\partial^{1,1}\psi_{\omega,\omega''}$, $\partial^{1,1}\psi_{\omega',\omega''}$, $\partial^{1,1}\varphi_{\omega,\omega'''}$ und $\partial^{1,1}\varphi_{\omega',\omega'''}$ eliminirt werden können, wodurch man zur Parzial-Differenzialgleichung zurückgeführt wird. Dasselbe findet aber genau wiederum statt, wenn in dieser erstern Voraussetzung $\omega''' = \omega''$ geworden, und deshalb v die andere Form $\omega''' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega''} + \varphi_{\omega,\omega',\omega''}$ angenommen haben sollte.

Die singulären Werthe endlich findet man allemal zugleich bei der Integration in Form einer unendlichen Reihe, in so fern man die Koeffizienten $\delta^2 u$, &c. dieser Reihe $= \frac{0}{0}$ setzt.

Anmerkung. Es ist augenfällig, wie das vorstehende auf Parzialgleichungen der 2ten Ordnung mit 5 und beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen ausgedehnt werden kann. Namentlich findet man bei 5 unabhängigen Veränderlichen das allgemeine Integral, so oft es endlich ist, in der Form

$$f_{x,y,z,t,v,u,v} = 0, \text{ wo} \left\{ \begin{array}{ll} \text{entweder} & v = \psi_{\omega,\omega',\omega'',\omega'''} + \varphi_{\omega,\omega',\omega'',\omega^{IV}} \\ \text{oder} & v = \omega^{IV} \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega'',\omega'''} + \varphi_{\omega,\omega',\omega'',\omega'''} \end{array} \right\},'$$

je nachdem, unter der Voraussetzung von $v = \psi + \varphi$, ω''' von ω^{IV} verschieden bleibt, oder ihm gleich wird, welches letztere Ereigniß anzeigt, daß jetzt $v = \omega^{IV} \cdot \psi + \varphi$ genommen werden müsse.

§. 319. Aufgabe und Auflösung.

Und soll eine Parzialgleichung der nten Ordnung mit m unabhängigen Veränderlichen (außer dem abhängigen Veränderlichen u, welcher eben gesucht wird) integrirt werden; so wird man genau eben so wie in den frühern hierher gehörigen speziellen Aufgaben der (§§. 265. 271. 276. 283. 290. 302. und 313.) am bequemsten mit Zuziehung der Variationsrechnung, eine nach Potenzen von $x - \alpha$ fortlaufende unendliche Reihe finden, deren Koeffizienten n willkührliche Funktionen der übrigen unabhängigen Veränderlichen (nebst deren Ableitungen nach letztern) in sich aufgenommen haben werden.

Desgleichen wird diese Methode, indem man die Koeffizienten $\delta^n u$, $\delta^{n+1} u$, ꝛc. $= \frac{0}{0}$ setzt, zugleich auch alle etwa vorhandenen singulären Werthe liefern, welche nicht in dem allgemeinen Integral enthalten sind, und doch der gegebenen Parzialgleichung genügen, wie solches aus den angeführten (§§.) völlig in die Augen leuchtet.

§. 320. Zusatz.

War bisher die endliche Form des allgemeinen Integrals einer Parzialgleichung der 2ten Ordnung, welche hier in den (§§. 304. 314. 318.) mitgetheilt worden ist, noch unbekannt;

so muß dies um so mehr von der endlichen Form des allgemeinen Integrals einer Parzialgleichung der nten Ordnung gesagt werden. Dieselben, aus der allgemeinen Integration durch unendliche Reihen geschöpften Betrachtungen, welche uns bei der 2ten Ordnung den richtigen Weg geführt haben, sind es gewesen, welche auch für die gegenwärtige ganz allgemeine Aufgabe die endliche Form des allgemeinen Integrals geliefert haben. — Man findet nämlich, daß das Integral einer solchen Parzialgleichung der nten Ordnung, wenn ein solches in endlicher Form existirt, allemal durch eine Gleichung zwischen den m unabhängigen Veränderlichen, der gesuchten Funktion u und noch einem Buchstaben ν ausgedrückt werden kann, während dieser Buchstabe ν einen von folgenden Ausdrücken repräsentirt, nämlich:

1) Wenn nur zwei unabhängige Veränderliche x und y vorkommen, so daß $m = 2$ ist; so hat ν eine der folgenden Formen

$$\nu = \omega'^{n-1} \cdot \psi_\omega^{(n-1)} + \omega'^{n-2} \cdot \psi_\omega^{(n-2)} + \cdots + \omega' \cdot \psi_\omega^{(1)} + \psi,$$

$$\nu = \omega'^{n-2} \cdot \psi_\omega^{(n-1)} + \omega'^{n-3} \cdot \psi_\omega^{(n-2)} + \cdots + \omega' \cdot \psi_\omega^{(2)} + \psi_\omega^{(1)} + \psi_{\omega'},$$

$$\nu = \omega'^{(n-3)} \cdot \psi_\omega^{(n-1)} + \omega'^{n-4} \cdot \psi_\omega^{(n-2)} + \cdots + \omega' \cdot \psi_\omega^{(2)} + \psi_\omega^{(1)} + \omega \cdot \psi_{\omega'},$$

$$\nu = \omega'^{n-4} \cdot \psi_\omega^{(n-1)} + \cdots + \psi_\omega^{(3)} + \psi_\omega^{(2)} + \omega \cdot \psi_\omega^{(1)} + \omega^2 \cdot \psi_{\omega'},$$

$$\nu = \omega'^{n-\alpha-2} \cdot \psi_\omega^{(n-1)} + \omega'^{(n-\alpha-3)} \cdot \psi_\omega^{(n-2)} + \cdots + \omega^{\alpha-2} \cdot \psi_{\omega'}^{(2)} + \omega^{\alpha-1} \cdot \psi_{\omega'}^{(1)} + \omega^\alpha \cdot \psi_{\omega'},$$

wo die letzte Form von ν dann eingetreten seyn wird, wenn $n-\alpha-2$ entweder gleich α, oder nur um 1 größer als α ist, während in jeder dieser verschiedenen Formen von ν die n Zeichen $\psi^{(n-1)}$, $\psi^{(n-2)}$, $\psi^{(n-3)}$, ... $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ eben so viele ganz willkührliche Funktionen des unten angehängten ω oder ω' vorstellen, letztere ω und ω' aber bestimmte Funktionen von x, y und u sind.

2) Enthält aber die Parzialgleichung, außer der gesuchten Funktion u, noch die 3 unabhängigen Veränderlichen x, y und z, so daß $m = 3$ ist; so hat ν eine der folgenden Formen:

$$v = \omega''^{n-1} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega'} + \omega''^{n-2} \cdot \psi^{(n-2)}_{\omega,\omega'} + \cdots + \omega''^{2} \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega'} + \omega'' \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega'} + \psi_{\omega,\omega'},$$

$$v = \omega''^{n-2} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega'} + \omega''^{n-3} \cdot \psi^{(n-2)}_{\omega,\omega'} + \cdots + \omega'' \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega'} + \omega'' \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega'} + \psi_{\omega,\omega''},$$

$$v = \omega''^{n-3} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega'} + \omega''^{n-4} \cdot \psi^{(n-2)}_{\omega,\omega'} + \cdots + \psi^{(2)}_{\omega,\omega'} + \psi^{(1)}_{\omega,\omega'} + \omega' \cdot \psi_{\omega,\omega''},$$

$$v = \omega''^{n-4} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega'} + \omega''^{n-5} \cdot \psi^{(n-2)}_{\omega,\omega'} + \cdots + \psi^{(2)}_{\omega,\omega''} + \omega' \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega''} + \omega'^{2} \cdot \psi_{\omega,\omega''},$$

$$v = \omega''^{n-a-2} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega'} + \omega''^{n-a-3} \cdot \psi^{(n-2)}_{\omega,\omega'} + \cdots + \omega'^{a-2} \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega''} + \omega'^{a-1} \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega''} + \omega''^{a} \cdot \psi_{\omega,\omega''},$$

wo wiederum die n Zeichen $\psi^{(n-1)}$, $\psi^{(n-2)}$, ..., $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ eben so viele willkührliche Funktionen von ω und ω', oder von ω und ω'' vorstellen, während ω, ω' und ω'' bestimmte Funktionen von x, y, z und u sind.

3) Kommen in der Parzialgleichung 4 unabhängige Veränderliche x, y, z, t außer der zu bestimmenden Funktion u vor, so daß $m = 4$ ist; so hat v eine der folgenden Formen:

$$v = \omega'''^{n-1} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \cdots + \omega'''^{2} \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega''' \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi_{\omega,\omega',\omega''},$$

$$v = \omega'''^{n-2} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \cdots + \omega''' \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi_{\omega,\omega',\omega'''},$$

$$v = \omega'''^{n-3} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \cdots + \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega'''} + \omega'' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega'''},$$

$$v = \omega'''^{n-4} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \cdots + \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega'''} + \omega'' \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega'''} + \omega''^{2} \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega'''},$$

$$v = \omega'''^{n-a-2} \cdot \psi^{(n-1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \cdots + \omega''^{a-2} \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega'''} + \omega''^{a-1} \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega'''} + \omega''^{a} \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega'''},$$

wo wiederum n willkührliche Funktionen von ω, ω' und ω'' oder von ω, ω' und ω''' vorkommen, während $\omega, \omega', \omega''$ und ω''' bestimmte Funktionen von x, y, z und t sind.

4) Und man sieht nun leicht, nach welchem Gesetze sich die verschiedenen Formen von v richten, wenn $m = 5, 6, 7$, ꝛc. oder allgemein $= m$ ist.

Beweis-Andeutung. Daß die n willkührlichen Funktionen, welche in das allgemeine Integral der Parzialgleichung der nten Ordnung (nach §. 319.) eingehen, sobald solches auf eine endliche Form gebracht ist, in einem einzigen Ausdruck v nur vorkommen können, muß zuerst bewiesen werden, und läßt sich leicht dadurch beweisen, daß man zeigt, wie außerdem viel zu viel willkührliche Ausdrücke (in dem Inte-

gral und in allen seinen Ableitungsgleichungen bis zur nten Ordnung hin) entstehen würden, welche nicht alle eliminirt werden könnten.

Hernach muß man zeigen, daß in dem Falle (1) die Funktion ν bloß ω und ω', in dem Falle (2.) dasselbe ν bloß ω, ω' und ω'', in dem Falle (3.) aber dasselbe ν nur $\omega, \omega', \omega''$ und ω''' enthalten könne, d. h. jedesmal nicht mehr solche bestimmte Funktionen ω, ω' 2c. und auch nicht weniger.

Betrachten wir nun zunächst bloß den Fall (1.), wo in der gegebenen Parzialgleichung Ableitungen nur nach zweien unabhängigen Veränderlichen vorkommen, wo also ν bloß ω und ω' enthalten kann. Da, wenn man von dem allgemeinen Integral

$$W_{x,y,\cdots,u,\nu} = 0$$

nach und nach die Ableitungsgleichungen nimmt (nach den beiden unabhängigen Veränderlichen), in alle diese Gleichungen außer ν nur noch

$\partial\nu_\omega$, $\partial\nu_{\omega'}$, $\partial^2\nu_\omega$, $\partial^{1,1}\nu_{\omega,\omega'}$, $\partial^2\nu_{\omega'}$, $\partial^3\nu_\omega$, $\partial^{2,1}\nu_{\omega,\omega'}$, $\partial^{1,2}\nu_{\omega,\omega'}$,
$\partial^3\nu_{\omega'}$, $\partial^4\nu_\omega$, $\partial^{3,1}\nu_{\omega,\omega'}$, $\partial^{2,2}\nu_{\omega,\omega'}$, $\partial^{1,3}\nu_{\omega,\omega'}$, $\partial^4\nu_{\omega'}$, $\partial^5\nu_\omega$ 2c. 2c.

eingehen, welche allein mit ν zugleich willkührliche Funktionen enthalten, und da die Zahl dieser Ausdrücke allemal genau der Zahl aller vorhandenen Ableitungsgleichungen gleich kommt; da ferner die erstere Anzahl genau um 1 kleiner seyn muß als die letztere, wenn eine Eliminationsgleichung, und auch nur eine einzige, möglich seyn soll, welche von den in ν enthaltenen willkührlichen Funktionen nichts enthält, und welche daher die gegebene Parzialgleichung seyn kann und seyn muß: so folgt, daß die Funktion ν das Eigenthümliche haben muß, daß eine der $n+1$ Ableitungen

$$\begin{cases} \partial^n\nu_\omega, & \partial^{n-1,1}\nu_{\omega,\omega'}, & \partial^{n-2,2}\nu_{\omega,\omega'}, \cdots \partial^{n-b,b}\nu_{\omega,\omega'}, \cdots \\ \partial^n\nu_{\omega'}, & \partial^{1,n-1}\nu_{\omega,\omega'}, & \partial^{2,n-2}\nu_{\omega,\omega'}, \cdots \partial^{b,n-b}\nu_{\omega,\omega'}, \cdots \end{cases}$$

genau 0 wird. Weil aber die Unterscheidung von ω und ω' nicht zu neuen Formen von ν führt; so folgt, daß man nur die Ableitungen in der letzteren Zeile $\left(\text{der Anzahl nach } \frac{n+1}{2} \text{ oder } \frac{n}{2}+1, \text{ je nachdem } n \text{ ungerade oder gerade ist}\right) = 0$ zu setzen braucht.

Aus den Gleichungen

$$\partial^n\nu_{\omega'} = 0, \quad \partial^{1,n-1}\nu_{\omega,\omega'} = 0, \quad \partial^{2,n-2}\nu_{\omega,\omega'} = 0, \cdots \partial^{b,n-b}\nu_{\omega,\omega'} = 0$$

gehen aber genau die oben im Falle (1.) für ν gegebenen verschiedenen Formen hervor.

Ganz analoge Schlüsse führen dann sogleich zu den Formen von ν in den Fällen (2.), (3.) ꝛc.

Und da dieser Beweis zugleich für den einfachsten Fall gilt, in welchem $n = 2$ ist, und welcher in den (§§. 304. 314. 318. und Anmerkung zu §. 318.) bereits behandelt worden ist; so haben wir in den angeführten (§§.) bloß kurz die Thatsache festgestellt, und die vollständigere Begründung bis hieher verschoben.

Anmerkung. Wenn man bedenkt, wie wichtig es wird, so oft die Behandlung eines Einzelfalles (in irgend einer Anwendung) zu verfolgen ist, bereits die Form des allgemeinen Integrals zu kennen; wenn man ferner erwägt, daß gerade dadurch erst die Theorie der Parzialgleichungen, und somit der Differenzialgleichungen überhaupt, etwas Abgeschlossenes wird (obgleich dann hinsichtlich der Integration in endlicher Form selber noch ungefähr so viel zu wünschen bleibt, wie schon in der Analysis des Endlichen hinsichtlich der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen, welche den 4ten Grad übersteigen, sobald solche ebenfalls in endlicher Form verlangt wird), — wenn man dies alles in Anschlag bringt: so wird es nicht überflüssig erscheinen, wenn wir hier die Resultate noch etwas zusammenstellen, und mit einander vergleichen.

I. Mag die Parzialgleichung zu irgend einer Ordnung gehören, so ist ihr allgemeines Integral in endlicher Form allemal durch eine Gleichung zwischen den Veränderlichen und noch einem Buchstaben ν, also etwa durch

$$W_{x,y,\cdots u,\nu} = 0$$

auszudrücken, wo aber ν einen Ausdruck repräsentirt, welcher 1, 2, 3 oder n willkührliche Funktionen (von ω, oder von ω,ω' ꝛc., während letztere ω,ω' ꝛc. bestimmte Funktionen von x, y, ꝛc. u vorstellen) in sich aufgenommen hat, je nachdem die Parzialgleichung selbst beziehlich von der 1sten, 2ten, 3ten oder nten Ordnung ist.

II. Dieser durch ν repräsentirte Ausdruck hat dabei allemal folgende Form, nämlich

A) Bei einer Parzialgleichung der ersten Ordnung

1) mit 2 unabhängigen Veränderlichen x, y

ist $$v = \psi_{\omega},$$

und ω ist eine bestimmte Funktion von x, y und u;

2) mit 3 unabhängigen Veränderlichen x, y, z

ist $$v = \psi_{\omega,\omega'},$$

und ω,ω' sind bestimmte Funktionen von x, y, z und u;

3) mit 4 unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t

ist $$v = \psi_{\omega,\omega',\omega''},$$

und ω,ω',ω'' sind bestimmte Funktionen von x, y, z, t und u, während jedesmal ψ eine ganz willkührliche Funktion von ω, oder von ω und ω', oder von ω,ω' und ω'' u. s. f. vorstellt. U. s. w. f.

B) Bei einer Parzialgleichung der zweiten Ordnung

1) mit 2 unabhängigen Veränderlichen x, y

$$\text{ist} \begin{cases} \text{entweder} & v = \omega' \cdot \psi_{\omega}^{(1)} + \psi_{\omega} \\ \text{oder} & v = \psi_{\omega}^{(1)} + \psi_{\omega'} \end{cases},$$

und ω,ω' sind bestimmte Funktionen von x, y und u;

2) mit 3 unabhängigen Veränderlichen x, y, z

$$\text{ist} \begin{cases} \text{entweder} & v = \omega'' \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega'} \\ \text{oder} & v = \psi_{\omega,\omega'}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega''} \end{cases},$$

und ω,ω' und ω'' sind bestimmte Funktionen von x, y, z und u;

3) mit 4 unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t

$$\text{ist} \begin{cases} \text{entweder} & v = \omega''' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega''}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega',\omega''} \\ \text{oder} & v = \psi_{\omega,\omega',\omega''}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega',\omega'''} \end{cases},$$

und $\omega,\omega',\omega'',\omega'''$ sind bestimmte Funktionen von x, y, z, t und u, während jedesmal $\psi^{(1)}$ und ψ zwei ganz willkührliche Funktionen vorstellen. U. s. w. f.

C) Bei einer Parzialgleichung der dritten Ordnung

1) mit 2 unabhängigen Veränderlichen x, y

$$\text{ist} \begin{cases} \text{entweder} & \nu = \omega'^2 \cdot \psi_\omega^{(2)} + \omega' \cdot \psi_\omega^{(1)} + \psi_\omega \\ \text{oder} & \nu = \omega' \cdot \psi_\omega^{(2)} + \psi_\omega^{(1)} + \psi_{\omega'} \end{cases},$$

und ω, ω' sind bestimmte Funktionen von x, y und u;

2) mit 3 unabhängigen Veränderlichen x, y, z

$$\text{ist} \begin{cases} \text{entweder} & \nu = \omega''^2 \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(2)} + \omega'' \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega'} \\ \text{oder} & \nu = \omega'' \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(2)} + \psi_{\omega,\omega'}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega''} \end{cases},$$

und $\omega, \omega', \omega''$ sind bestimmte Funktionen von x, y, z und u;

3) mit 4 unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t

$$\text{ist} \begin{cases} \text{entweder} & \nu = \omega'''^2 \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega''}^{(2)} + \omega''' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega''}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega',\omega''} \\ \text{oder} & \nu = \omega''' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega''}^{(2)} + \psi_{\omega,\omega',\omega''}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega',\omega'''} \end{cases},$$

und $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$ sind bestimmte Funktionen von x, y, z, t und u, während jedesmal $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ drei ganz willkührliche Funktionen der verschiedenen ω sind. U. s. w. f.

D) Bei einer Parzialgleichung der vierten Ordnung

1) mit 2 unabhängigen Veränderlichen x, y

$$\text{ist} \begin{cases} \text{entweder} & \nu = \omega'^3 \cdot \psi_\omega^{(3)} + \omega'^2 \cdot \psi_\omega^{(2)} + \omega' \cdot \psi_\omega^{(1)} + \psi_\omega \\ \text{oder} & \nu = \omega'^2 \cdot \psi_\omega^{(3)} + \omega' \cdot \psi_\omega^{(2)} + \psi_\omega^{(1)} + \psi_{\omega'} \\ \text{oder} & \nu = \omega' \cdot \psi_\omega^{(3)} + \psi_\omega^{(2)} + \psi_{\omega'}^{(1)} + \omega \cdot \psi_{\omega'} \end{cases},$$

und ω, ω' sind bestimmte Funktionen von x, y und u;

2) mit 3 unabhängigen Veränderlichen x, y, z

$$\text{ist} \begin{cases} \text{entweder} & \nu = \omega''^3 \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(3)} + \omega''^2 \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(2)} + \omega'' \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega'} \\ \text{oder} & \nu = \omega''^2 \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(3)} + \omega'' \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(2)} + \psi_{\omega,\omega'}^{(1)} + \psi_{\omega,\omega''} \\ \text{oder} & \nu = \omega'' \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{(3)} + \psi_{\omega,\omega'}^{(2)} + \psi_{\omega,\omega''}^{(1)} + \omega' \cdot \psi_{\omega,\omega''} \end{cases},$$

und $\omega, \omega', \omega''$ sind bestimmte Funktionen von x, y, z und u;

3) mit 4 unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t

$$\text{ist} \begin{cases} \text{etw. } \nu = \omega'''^3 \cdot \psi^{(3)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega'''^2 \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega''' \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi_{\omega,\omega',\omega''} \\ \text{oder } \nu = \omega'''^2 \cdot \psi^{(3)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega''' \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi_{\omega,\omega',\omega'''} \\ \text{oder } \nu = \omega''' \cdot \psi^{(3)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega'''} + \omega'' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega'''} \end{cases}$$

und $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$ sind bestimmte Funktionen von x, y, z, t und u, während $\psi^{(3)}$, $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, und ψ vier ganz willkührliche Funktionen der verschiedenen ω sind. U. s. w. f.

E) Bei einer Parzialgleichung der fünften Ordnung

1) mit 2 unabhängigen Veränderlichen

$$\text{ist} \begin{cases} \nu = \omega'^4 \cdot \psi^{(4)}_{\omega} + \omega'^3 \cdot \psi^{(3)}_{\omega} + \omega'^2 \cdot \psi^{(2)}_{\omega} + \omega' \cdot \psi^{(1)}_{\omega} + \psi_{\omega} \\ \nu = \omega'^3 \cdot \psi^{(4)}_{\omega} + \omega'^3 \cdot \psi^{(3)}_{\omega} + \omega' \cdot \psi^{(2)}_{\omega} + \psi^{(1)}_{\omega} + \psi_{\omega'} \\ \nu = \omega'^2 \cdot \psi^{(4)}_{\omega} + \omega' \cdot \psi^{(3)}_{\omega} + \psi^{(2)}_{\omega} + \psi^{(1)}_{\omega'} + \omega \cdot \psi_{\omega'} \end{cases};$$

2) mit 3 unabhängigen Veränderlichen

$$\text{ist} \begin{cases} \nu = \omega''^4 \cdot \psi^{(4)}_{\omega,\omega'} + \omega''^3 \cdot \psi^{(3)}_{\omega,\omega'} + \omega''^2 \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega'} + \omega'' \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega'} + \psi_{\omega,\omega'} \\ \nu = \omega''^3 \cdot \psi^{(4)}_{\omega,\omega'} + \omega''^2 \cdot \psi^{(3)}_{\omega,\omega'} + \omega'' \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega'} + \psi^{(1)}_{\omega,\omega'} + \psi_{\omega,\omega''} \\ \nu = \omega''^2 \cdot \psi^{(4)}_{\omega,\omega'} + \omega'' \cdot \psi^{(3)}_{\omega,\omega'} + \psi^{(2)}_{\omega,\omega'} + \psi^{(1)}_{\omega,\omega''} + \omega' \cdot \psi_{\omega,\omega''} \end{cases};$$

3) mit 4 unabhängigen Veränderlichen

$$\text{ist} \begin{cases} \nu = \omega'''^4 \cdot \psi^{(4)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega'''^3 \psi^{(3)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega'''^2 \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega''' \cdot \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi_{\omega,\omega',\omega''} \\ \nu = \omega'''^3 \cdot \psi^{(4)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega'''^2 \psi^{(3)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega''' \cdot \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi_{\omega,\omega',\omega'''} \\ \nu = \omega'''^2 \cdot \psi^{(4)}_{\omega,\omega',\omega''} + \omega''' \cdot \psi^{(3)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi^{(2)}_{\omega,\omega',\omega''} + \psi^{(1)}_{\omega,\omega',\omega'''} + \omega''' \cdot \psi_{\omega,\omega',\omega'''} \end{cases}$$

während allemal $\psi^{(4)}$, $\psi^{(3)}$, $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ fünf ganz willkührliche Funktionen der angegebenen und verschiedenen ω sind. U. s. w. f.

U. s. w. f., für jede Ordnung der Parzialgleichung und für beliebig viel unabhängige Veränderliche, nach denen die Parzial=

gleichung Ableitungen von u enthalten mag. — Namentlich hat z. B. in der 6ten Ordnung der Parzialgleichungen der Buchstabe ν in dem allgemeinen Integral derselben allemal nur 3 verschiedene Formen, während in der 7ten und 8ten Ordnung derselbe Buchstabe ν allemal 4 verschiedene, in der 9ten und 10ten Ordnung dagegen allemal 5 verschiedene Formen annimmt.

III. Versucht man es, und denkt sich von dem allgemeinen Integral in (I.), nämlich von

$$W = 0,$$

in den verschiedenen Fällen der (II.) die Ableitungsgleichungen bis zur Ordnung der Parzialgleichung hin, nach allen unabhängigen Veränderlichen genommen; so wird man allemal gerade eine Gleichung mehr haben als von den willkührlichen Funktionen ψ, $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$, ꝛc. herrührende unbestimmte und willkührliche Ausdrücke, so daß letztere gerade alle eliminirt werden können, und nur eine einzige Eliminationsgleichung entsteht, wie dies seyn muß, wenn der gegebenen Parzialgleichung selbst durch das allgemeine Integral vollkommen entsprochen werden soll.

Namentlich hat man in dem Falle (II. A. 1.) 3 Gleichungen, in denen die 2 unbestimmten und willkührlichen Ausdrücke $\partial\psi_\omega$ ψ_ω eliminirt werden können.

In dem Falle (II. A. 2.) ergeben sich 4 Gleichungen, welche ψ, $\partial\psi_\omega$ und $\partial\psi_{\omega'}$ enthalten.

In dem Falle (II. A. 3.) hat man 5 Gleichungen zwischen den 4 willkührlichen Ausdrücken ψ, $\partial\psi_\omega$, $\partial\psi_{\omega'}$, $\partial\psi_{\omega''}$.

In dem Falle (II. B. 1.) hat man 6 Gleichungen zwischen den 5 willkührlichen von $\psi^{(1)}$ und ψ herrührenden Ausdrücken (Vgl. 304.)

In dem Falle (II. B. 2.) ergeben sich 10 Gleichungen zwischen 9 willkührlichen von $\psi^{(1)}$ und ψ herrührenden Ausdrücken. (Vgl. §. 314.).

In dem Falle (II. B. 3.) findet man 15 Gleichungen, welche 14 willkührliche Ausdrücke enthalten. (Vgl. §. 218.).

In dem Falle (II. C. 1.) erhält man 10 Gleichungen und 9 von $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ herrührende willkührliche Ausdrücke.

In dem Falle (II. C. 2.) häufen sich 20 Gleichungen an, welche 19 von $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ herrührende Ausdrücke enthalten, die alle eliminirt werden können.

In dem Falle (II. C. 3.) gelangt man zu 35 Gleichungen zwischen 34 von $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ herrührenden Ausdrücken.

In dem Falle (II. D. 1.) hat man 15 Gleichungen zwischen 14 von $\psi^{(3)}$, $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ herrührenden Ausdrücken.

In dem Falle (II. D. 2.) ergeben sich 35 Gleichungen zwischen 34 von $\psi^{(3)}$, $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ herrührenden Ausdrücken.

In dem Falle (II. D. 3.) hat man sogar 70 Gleichungen, aus denen die 69 vorkommenden von $\psi^{(3)}$, $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$ und ψ abhängigen unbestimmten Ausdrücke gerade eliminirt werden können.

U. s. w. f.

§. 321. Erklärung.

Eine Parzialgleichung $F = 0$ der nten Ordnung kann auch erste, zweite, dritte ꝛc. und allgemein rte Integrale haben, welche selber wieder Parzial-Differenzialgleichungen beziehlich von der n—1ten, n—2ten, n—3ten, ꝛc. und allgemein von der n—rten Ordnung seyn werden, wenn man nur unter einem rten Integral von $F = 0$ diejenige Parzial-Differenzialgleichung $W = 0$ von der n—rten Ordnung versteht, welche, wenn man alle ihre Ableitungsgleichungen nach allen unabhängigen Veränderlichen bis zur rten Ordnung hin, nimmt, und dann aus allen Gleichungen (mit Einschluß der $F = 0$) so viele der Ableitungen eliminirt, als dies möglich ist, zuletzt zu einer Gleichung von der Form $0 = 0$ führt, also daß die übrigen Ableitungen nebst den Veränderlichen sich von selbst wegheben. (Vgl. §. 274. u. §. 279.).

§. 322. Zusatz.

Im (§. 279.) hat man gesehen, daß jede Differenzialgleichung der nten Ordnung mit nur einem einzigen unabhängigen Veränderlichen allemal ein, ja mehrere rte Integrale hat. Man

würde sich aber sehr irren, wenn man dasselbe auch von einer Differenzialgleichung der nten Ordnung mit zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen (d. h. von einer Parzialgleichung) behaupten wollte. Im Gegentheil ist solches hier nur selten der Fall, und es haben die gegebenen Parzial-Differenzialgleichungen zuerst gewisse Bedingungsgleichungen zu erfüllen, ehe ihnen ein Integral zukommen kann, welches noch keine Urgleichung, d. h. welches selber noch eine Parzial-Differenzialgleichung ist, und diese Bedingungsgleichungen sind es gerade, welche, im Falle ein solches niedrigeres Integral (das Ur-Integral als das höchste angesehen) existirt, zur Auffindung desselben beitragen können.

I. Gesetzt man hätte die Parzialgleichung der 2ten Ordnung mit 2 unabhängigen Veränderlichen, nämlich

1) $F_{x,y,z,z_{1/1},z_{2/1},z_{1/2}} = 0,$

und 2) $W_{x,y,z,z_{1/1}} = 0$

sey ihr existirendes erstes Integral; so wird

3) $\partial W_{(x)} = 0$ sowohl z_2 als auch ${}_1z_1$

dagegen 4) $\partial W_{(y)} = 0$ sowohl ${}_1z_1$ als auch ${}_2z$

enthalten. Soll nun aus (1. 2. 3. und 4.) durch Elimination von z_2, ${}_1z_1$ und ${}_2z$ eine Gleichung von der Form $0 = 0$ hervorgehen können; so muß, wenn aus (1. 3. und 4.) die beiden Ausdrücke z_2 und ${}_2z$ eliminirt werden, aus der entstehenden Eliminationsgleichung die Ableitung ${}_1z_1$ von selber herausfallen. Und soll aus (2. 3. und 4.), durch Elimination von willkührlichen Konstanten oder von willkührlichen Funktionen, die Gleichung (1.) nämlich $F = 0$ hervorgehen; so muß auch, wenn man aus (1. 3. und 4.) die Ableitungen z_2 und ${}_2z$ eliminirt, die (2.) wiederum erscheinen, also die Ableitung der 2ten Ordnung ${}_1z_1$ von selber mit herausfallen, welche Bedingung zu einer, aber auch zu einer Reihe von Bedingungsgleichungen führen kann, wenn nämlich die letztbesprochene Eliminationsgleichung von der Form

$$A + B \cdot {}_1z_1 + C \cdot {}_1z_1^2 + D \cdot {}_1z_1^3 + \text{ꝛc.} = 0$$

seyn sollte, wo dann $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, ꝛc.

die mehreren Gleichungen seyn würden, welche zur Bestimmung der Funktion W dienen, so daß dann, ähnlich wie in den (§§. 296—300.), die Bedingungsgleichungen hervorgehen, welche erfüllt seyn müssen, wenn ein erstes Integral möglich seyn soll.

Beispiel 1. Wendet man dies auf die gegebene Parzialgleichung

$$1) \quad \partial^2 z_x \cdot (1 + \partial z_y^2) - \partial^2 z_y \cdot (1 + \partial z_x^2) + 2(\partial^{1,1} z_{x,y})^2 = 0$$

an; so erhält man aus dem supponirten ersten Integral

$$2) \quad W_{x,y,z,z_{1,1}z} = 0$$

sogleich

$$3) \quad \partial W_{(x)} = 0, \text{ d. h. } \partial W_x + \partial W_z \cdot \partial z_x + \partial W_{z_1} \cdot \partial^2 z_x + \partial W_{1z} \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} = 0,$$

$$4) \quad \partial W_{(y)} = 0, \text{ d. h. } \partial W_y + \partial W_z \cdot \partial z_y + \partial W_{z_1} \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + \partial W \cdot_{z_1} \partial^2 z_y = 0$$

Findet man nun aus (3.) $\partial^2 z_x$, so wie aus (4.) $\partial^2 z_y$, und substituirt diese Werthe in die (1.); so erhält man eine Gleichung von der Form

$$A + B \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + 2 \cdot (\partial^{1,1} z_{x,y})^2 = 0,$$

welche Gleichung in $A = 0$, $B = 0$ und $2 = 0$ zerfällt, von denen die letztere einen Widerspruch anzeigt, also anzeigt, daß die hier gegebene Parzialgleichung der 2ten Ordnung kein erstes Integral habe.

Beispiel 2. Behandelt man auf dieselbe Weise diese andere Gleichung

$$(\partial^2 z_x)^3 - 2\partial z_x \cdot \partial z_y \cdot (\partial^{1,1} z_{x,y})^3 + (\partial^2 z_y)^3 = 0;$$

so erhält man zur Bestimmung von W die Gleichungen

$$(\partial W_x + \partial W_z \cdot \partial z_x)^3 \cdot (\partial W_{1z})^3 + (\partial W_y + \partial W_z \cdot \partial z_y)^3 \cdot (\partial W_{z_1})^3 = 0,$$

$$(\partial W_x + \partial W_z \cdot \partial z_x)^2 \cdot (\partial W_{1z})^4 + (\partial W + \partial W_z \cdot \partial z_y)^2 \cdot (\partial W_{z_1})^4 = 0,$$

$$(\partial W_x + \partial W_z \cdot \partial z_x) \cdot (\partial W_{1z})^5 + (\partial W_y + \partial W_z \cdot \partial z) \cdot (\partial W_{z_1})^5 = 0$$

und $$(\partial W_{1z})^6 + (\partial W_{z_1})^6 + 2\partial z_x \cdot \partial z_y \cdot [(\partial W_{z_1})^3 + (\partial W_{1z})^3] = 0.$$

Weil sich aber diese 4 Gleichungen gegenseitig widersprechen, so ist dasmal wiederum kein erstes Integral möglich.

Ist insbesondere die Parzialgleichung der 2ten Ordnung

$$M + N \cdot \partial^2 z_x + P \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + Q \cdot \partial^2 z_y = 0$$

gegeben, wo M, N, P, Q gegebene Funktionen von x, y, z, ∂z_x und ∂z_y sind; so erhält man auf demselben Wege, im Falle ein

erstes Integral $W = 0$ existirt, zur Bestimmung dieses W die beiden Gleichungen

$$M - N \cdot \frac{\partial W_x + \partial W_z \cdot \partial z_x}{\partial W_{z_1}} - Q \cdot \frac{\partial W_y + \partial W_z \cdot \partial z_y}{\partial W_{1z}} = 0$$

und

$$P - N \cdot \frac{\partial W_{1z}}{\partial W_{z_1}} - Q \cdot \frac{\partial W_{z_1}}{\partial W_{1z}} = 0,$$

welches zwei Parzialgleichungen der 1sten Ordnung sind, aber mit den 5 unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, z_1, {}_1z$, so daß sich nach (§§. 296.—300.), wenn die Funktion W gefunden werden soll, eine Bedingungsgleichung ergiebt, W selbst aber dann, im Falle durch die gegebenen M, N, P, Q diese Bedingungsgleichung erfüllt seyn sollte, den angeführten (§§. 296.—300.) zu Folge, gefunden werden kann.

So findet man z. B. von der Gleichung der 2ten Ordnung

$$(1 + \partial z_x \cdot \partial z_y + \partial z_y^2) \cdot \partial^2 z_x + (\partial z_y^2 - \partial z_x^2) \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} - (1 + \partial z_x \cdot \partial z_y + \partial z_x^2) \cdot \partial^2 z_y = 0$$

als allgemeines erstes Integral

$$\partial z_x - \partial z_y = \sqrt{2 + (\partial z_x + \partial z_y)^2} \cdot \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = y - x \quad \text{ist}$$

und wo ψ eine ganz willkührliche Funktion von $y - x$ oder ω vorstellt.

Eben so findet sich auf dem angezeigten Wege von der Parzialgleichung

$$\partial z_y \cdot (z + y \cdot \partial z_y) + 2\partial z_x (z + y \cdot \partial z_y) \cdot \partial^2 z_x + \left(x(z + y \cdot \partial z_y) - 2\partial z_x (1 + y \cdot \partial z_x)\right) \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} - x(1 + y \cdot \partial z_x) \cdot \partial^2 z_y = 0$$

das allgemeine Integral der ersten Ordnung

$$\partial z_x^2 + x \cdot \partial z_y = \psi_\omega$$

wo $\omega = y \cdot z + x$ ist, und wo ψ eine ganz willkührliche Funktion von ω vorstellt.

II. Ist die Parzialgleichung $F = 0$ zwar von der zweiten Ordnung aber mit 3 unabhängigen Veränderlichen, so daß sie $x, y, z, u, \partial u_x, \partial u_y, \partial u_z, \partial^2 u_x, \partial^2 u_y, \partial^2 u_z, \partial^{1,1} u_{x,y}, \partial^{1,1} u_{x,z}, \partial^{1,1} u_{y,z}$ enthalten wird, und hätte sie ein erstes Integral, welches eine Parzialgleichung $W = 0$ zwischen x, y, z, u und $\partial u_x, \partial u_y, \partial u_z$ seyn würde; so müßte, wenn man aus $F = 0$ und

$\partial W_{(x)} = 0$, $\partial W_{(y)} = 0$, $\partial W_{(z)} = 0$ 3 Ableitungen der 2ten Ordnung, z. B. $\partial^2 u_x$, $\partial^2 u_y$, $\partial^2 u_z$ eliminirte, die 3 übrigen von selbst wegfallen, welches zu 3 Reihen von Bedingungsgleichungen führen kann.

III. Aehnliches wird sich für Parzialgleichungen der 2ten Ordnung ergeben, wenn sie beliebig viele unabhängige Veränderliche enthalten, und dabei ein erstes Integral haben sollen.

IV. Ist aber $F = 0$ eine Parzialgleichung der dritten Ordnung mit nur 2 unabhängigen Veränderlichen, (also zwischen x, y, z, ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$, $\partial^3 z_x$, $\partial^{2,1} z_{x,y}$, $\partial^{1,2} z_{x,y}$, $\partial^3 z_y$); so wird man, wenn

$$W = 0$$

als eine Parzialgleichung der 2ten Ordnung das erste Integral von dieser $F = 0$ seyn soll, aus $F = 0$, $\partial W_{(x)} = 0$, $\partial W_{(y)} = 0$, $\partial^3 z_x$ und $\partial^3 z_y$ eliminiren können, während dann $\partial^{2,1} z_{x,y}$ und $\partial^{1,2} z_{x,y}$ von selbst wegfallen müssen, um zu $W = 0$ zu gelangen. Hier wird man also zu 2 Reihen von Bedingungsgleichungen geführt werden können, welche alle erfüllt seyn müssen, wenn ein erstes Integral $W = 0$ möglich seyn soll.

Es mag aber von $F = 0$ der dritten Ordnung ein erstes Integral $W = 0$ existiren oder nicht; so kann man doch wiederum untersuchen, ob nicht vielleicht ein zweites Integral

$$V_{x,y,z,z_{1,1}z} = 0$$

existirt, welches eine Parzialgleichung der 1sten Ordnung ist. Existirt aber ein solches, so erhält man aus ihm noch

$$\partial V_{(x)} = 0, \qquad \partial V_{(y)} = 0,$$

welche $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$ und $\partial^2 z_y$ enthalten, und auch noch

$$\partial^2 V_{(x)} = 0, \quad \partial^{1,1} V_{(x,y)} = 0, \quad \partial^2 V_{(y)} = 0,$$

welche die 4 Ableitungen $\partial^3 z_x$, $\partial^{2,1} z_{x,y}$, $\partial^{1,2} z_{x,y}$ und $\partial^3 z_y$ enthalten werden. — Eliminirt man daher aus $F = 0$ und aus den letztern 5 Gleichungen

$$\partial V_{(x)} = 0,\ \partial V_{(y)} = 0,\ \partial^2 V_{(x)} = 0,\ \partial^{1,1} V_{(x,y)} = 0,\ \partial^2 V_{(y)} = 0$$

5 von den 7 Ableitungen $\partial^2 z_x$, $\partial^2 z_y$, $\partial^3 z_x$, $\partial^3 z_y$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^{2,1} z_{x,y}$, $\partial^{1,2} z_{x,y}$; so müssen die beiden übrigen von selbst wegfallen, weil $V = 0$ von der 1sten Ordnung hervorgehen muß. Und man wird also bei dieser Untersuchung wiederum auf 2 Reihen von Bedingungsgleichungen geführt, welche erfüllt seyn müssen, wenn das jetzige $F = 0$ ein zweites Integral soll haben können.

V. Das Vorliegende reicht aber aus, um in Einzelfällen das Verfahren mit Gleichungen einer beliebigen Ordnung und mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen einleiten zu können. (Vgl. eine sehr lesenswerthe Abhandlung des Prof. Rabe im 2ten Hefte des 7ten Bandes der Wiener Zeitschrift für Physik und Mathematik von Baumgärtner und v. Ettingshausen).

B. Wenn zur Bestimmung einer einzigen Funktion u (zweier oder mehrerer unabhängigen Veränderlichen) nicht eine, sondern mehrere Gleichungen gegeben sind.

§. 323.

Sind, wie in den (§§. 296.—300.) mehrere Parzialgleichungen zur Bestimmung einer einzigen Funktion u (von x, y, &c.) gegeben; so kann man die eine davon allgemein integriren, nachher aber die dadurch eingehenden willkührlichen Funktionen so beschränken, daß das gefundene u auch den übrigen gegebenen Gleichungen genügt, d. h. diese willkührlichen Funktionen aus den übrigen Gleichungen näher bestimmen, wie sich solches in den eben angeführten (§§.) für die Gleichungen der 1sten Ordnung bereits nachgewiesen findet.

Führt man aber dieses Verfahren aus, so wird man sich bald überzeugen, daß es nicht immer möglich ist, allen gegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit zu genügen, und man wird wiederum hier, wie dort schon, Bedingungsgleichungen der Integrabilität finden, welche von den gegebenen Parzialgleichungen erfüllt seyn müssen, wenn eine Auflösung der Aufgabe

selbst möglich seyn soll. Dies mag in folgenden einfachern und leichtern Fällen noch näher erörtert werden.

§. 324.

Es seyen zunächst zur Bestimmung einer Funktion z von x und y die 3 Parzialgleichungen der 2ten Ordnung gegeben,

1) $\partial^2 z_x = \psi$, 2) $\partial^{1,1} z_{x,y} = \varphi$ und 3) $\partial^2 z_y = \pi$,

wo ψ, φ, π gegebene Funktionen von x und y seyn mögen.

Integrirt man die (1.) allgemein, so erhält man zunächst das erste Integral

4) $$\partial z_x = \int \psi \cdot dx + Y;$$

dann aber das Ur-Integral

5) $$z = \int^2 \psi \cdot dx^2 + Y \cdot x + Y'$$

mit den beiden willkührlichen Funktionen Y und Y' von y, welche letztere nun aus den Gleichungen (2. und 3.) noch näher bestimmt werden müssen. — Dabei mögen $\int \psi \cdot dx$ und $\int^2 \psi \cdot dx^2$ mit $x = \alpha$ anfangen, wo α ganz willkührlich ist, aber kein y enthalten soll.

Substituirt man demnach diese Werthe (4. und 5.) in die Gleichungen (2. und 3.), so erhält man

6) $$\partial(\int \psi \cdot dx)_y + \partial Y_y = \varphi$$

und 7) $$\partial^2(\int^2 \psi \cdot dx^2)_y + x \cdot \partial^2 Y_y + \partial^2 Y'_y = \pi.$$

Aus der (6.) findet sich nun, wenn man zugleich (§§. 219.—224.) zu Hilfe nimmt,

8) $$\partial Y_y = \varphi - \partial(\int \psi \cdot dx)_y = \varphi - \int \partial \psi_y \cdot dx,$$

und diese Gleichung dient zur Bestimmung von Y, so oft $\varphi - \int \partial \psi_y \cdot dx$ kein x mehr, also bloß y enthält, welche letztere Bedingung ausgedrückt werden kann durch die Gleichung

I. $$\partial(\varphi - \int \partial \psi_y \cdot dx)_x = 0 \quad \text{oder} \quad \partial \varphi_x - \partial \psi_y = 0.$$

Ist aber diese Bedingungsgleichung (I.) erfüllt, und dann Y gefunden, und setzt man nachgehends diesen Werth in die Gleichung (7.); so erhält man

9) $\partial^2 Y'_y = \pi - x \cdot \partial\varphi_y + x \cdot \int \partial^2 \psi_y \cdot dx - \int^2 \partial^2 \psi_y \cdot dx^2$,

woraus, wenn man von dem Ausdruck rechts zwei mal hinter einander das Integral nach y nimmt, die Funktion Y' vollends bestimmt wird. — Damit aber die Gleichung (9.) keinen Widerspruch enthalte, folglich die Aufgabe möglich sey, darf der Ausdruck zur Rechten in (9.) kein x enthalten, welche Bedingung man dadurch in der Form einer Gleichung ausdrücken kann, daß man von ihm die Ableitung nach x nimmt, und solche der Null gleich setzt. Dies giebt aber die zweite Bedingungsgleichung

$$\partial\pi_x - \partial\varphi_y - x \cdot \partial^{1,1}\varphi_{x,y} + x \cdot \partial^2 \psi'_y = 0$$

d. h. II. $\partial\pi_x - \partial\varphi_y = 0$,

weil nach (I.) bereits

$\partial\varphi_x - \partial\psi_y = 0$, also auch $\partial(\partial\varphi_x - \partial\psi_y)_y = 0$ ist.

Umgekehrt: sind die Bedingungsgleichungen (I. und II.) erfüllt, so ist auch die Aufgabe allemal zu lösen *).

§. 325.

Wird z so gesucht, daß es nur zwei solchen Gleichungen, etwa den Gleichungen

1) $\partial^2 z_x = \psi$ und 2) $\partial^2 z_y = \pi$

zu genügen hat; so findet sich aus (1.)

3) $z = \int^2 \psi \cdot dx^2 + Y \cdot x + Y'$,

und wenn man diesen Werth in (2.) substituirt, so folgt

4) $\partial^2 Y'_y + x \cdot \partial^2 Y_y + \int^2 \partial^2 \psi_y \cdot dx^2 = \pi$,

---

*) Da aus den gegebenen Gleichungen (1.—3.)

$\partial\psi_y = \partial^{2,1} z_{x,y}$, $\partial\varphi_x = \partial^{2,1} z_{x,y}$, $\partial\varphi_y = \partial^{1,2} z_{x,y}$ und $\partial\pi_x = \partial^{1,2} z_{x,y}$

hervorgeht; so konnte man die beiden Bedingungsgleichungen unmittelbar aus dieser Beobachtung abnehmen. Allein man war dann noch nicht überzeugt, daß dies die einzigen sind, welche erfüllt seyn müssen.

aus welcher Gleichung eine der beiden willkührlichen Funktionen, z. B. Y' bestimmt werden kann. Damit aber die Aufgabe keinen Widerspruch enthalte, darf

$$\pi - x \cdot \partial^2 Y_y - \int^2 \partial^2 \psi_y \cdot dx^2$$

kein x mehr enthalten, d. h. es muß die Ableitung desselben nach x der Null gleich, also

$$(\sigma) \cdots \quad \partial \pi_x - \partial^2 Y_y - \int \partial^2 \psi_y \cdot dx = 0$$

seyn. Nimmt man hievon noch einmal die Ableitung nach x, so erhält man

$$(\mathfrak{C}) \cdots \quad \partial^2 \pi_x - \partial^2 \psi_y = 0,$$

welche Gleichung ($\mathfrak{C}$) statt der andern (σ) gesetzt werden kann.

Ist also diese Bedingungsgleichung der Integrabilität ($\mathfrak{C}$) erfüllt; so ist die Lösung dieser Aufgabe nicht nur möglich, sondern sie nimmt auch noch eine ganz willkührliche Funktion in sich auf. Ist aber die Gleichung ($\mathfrak{C}$) von den gegebenen Funktionen π und ψ nicht erfüllt; so existirt keine Funktion z von x und y, wie sie hier gesucht wird.

§. 326.

Wird z so gesucht, daß den beiden Gleichungen

$$1) \quad \partial^{1,1} z_{x,y} = \varphi \qquad \text{und} \qquad 2) \quad \partial^2 z_y = \pi$$

genügt werden soll, so findet man aus (1.) sogleich

$$3) \quad \partial z_y = \int \varphi \cdot dx + Y.$$

Setzt man diesen Werth in (2.); so ergiebt sich

$$4) \quad \int \partial \varphi_y \cdot dx + \partial Y_y = \pi$$

$$\text{oder} \quad 5) \quad \partial Y_y = \pi - \int \partial \varphi_y \cdot dx,$$

woraus sich die willkührliche Funktion Y ergiebt, so oft nur $\pi - \int \partial \varphi_y \cdot dx$ kein x mehr enthält, d. h. so oft die Bedingungsgleichung der Integrabilität

$$(\mathfrak{d}) \cdots \quad \partial \pi_x - \partial \varphi_y = 0$$

erfüllt ist. — Ist sie erfüllt, und hat man Y gefunden; so erhält man noch aus (3.)

6) $z = \int(\int \varphi \cdot dx + Y) \cdot dy + \int Y \cdot dy + X$,

wo X eine willkührliche Funktion von x ist, und wo die bloß angezeigten Integrale lauter besondere vorstellen.

Anmerkung. Diese Beispiele reichen aber aus, um den Geist des Verfahrens zu erfassen, und sich danach in vorkommenden Fällen benehmen zu können.

C. Wenn zur Bestimmung mehrerer Funktionen u, v, ꝛc. der unabhängigen Veränderlichen x, y, z, ꝛc. zwei oder mehrere Parzialgleichungen einer höhern Ordnung gegeben sind.

§. 327.

Sind mehrere Parzialgleichungen zur Bestimmung mehrerer Funktionen u, v, ꝛc. von x, y, ꝛc. gegeben; so verfahre man ganz analog dem (§. 301. des V. Th. d. S.), wo eine dieser Aufgaben schon betrachtet ist, wenn auch für den Fall, daß die gegebenen Parzialgleichungen alle von der ersten Ordnung sind.

Sowohl dort als auch hier muß man aber unterscheiden, ob mehr Gleichungen gegeben sind als zu bestimmende Funktionen u, v, ꝛc., oder ob weniger; oder ob genau eben so viele Parzialgleichungen gegeben sind, als zu bestimmende Funktionen u, v, ꝛc. Im letzteren Falle bleiben die durch die Integration eingehenden willkührlichen Funktionen gänzlich unbestimmt; im zweiten Falle bleibt eine oder bleiben einige der zu bestimmenden Funktionen u, v, ꝛc. völlig unbestimmt; während im erstern Fall außer den Gleichungen, wodurch die zu bestimmenden Funktionen u, v, ꝛc. ausgemittelt werden, noch Gleichungen übrig bleiben, welche zur Bestimmung der durch die Integration eingehenden willkührlichen Funktionen beitragen, welche aber auch in der Regel zu Bedingungsgleichungen der Integrabilität führen werden, die von den gegebenen Parzialgleichungen erfüllt seyn müssen, wenn die Aufgabe überhaupt möglich seyn soll.

Gedruckt bei den Gebr. Unger.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik

Bd.: 5

Berlin 1831

Math.u. 144 k-5/6
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594168-6